D. Scharnweber

Frankfurt a/Main 1970

[illegible]

[illegible]

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der [illegible] Fakultät der

[illegible] Universität

zu Frankfurt am Main

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Ein asymptotisch richtiges Schalenmodell für (symmetrische) Kernspaltung

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der Naturwissenschaftlichen Fakultät der

Johann Wolfgang Goethe-Universität

zu Frankfurt am Main

vorgelegt von

Dieter Scharnweber

aus Rudolstadt

Frankfurt a.M. 1970

Gedruckt mit Genehmigung der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Frankfurt am Main

Dekan: Prof.Dr. G. Schneider

Erster Berichterstatter: Prof.Dr. W. Greiner

Zweiter Berichterstatter: Prof.Dr. P. Fulde

Tag der mündlichen Prüfung:

Abstrakt: Ein Zwei-Zentren-Schalenmodell mit Oszillatorpotential, $\ell \cdot s$-Kraft und ℓ^2-Term wird entwickelt. Dabei werden verschiedene Arten der Volumenerhaltung untersucht. Die Schalenstruktur des sphärischen Ausgangskerns und die der getrennten Fragmente wird reproduziert. Für kleine Deformationen ist das Niveauschema dem des Nilsson-Modells ähnlich. Außerdem wird die Renormierung der liquid drop Energie durch die Schalenkorrektur nach Strutinsky für dieses Modell untersucht.

Abstract: Ein Zwei-Zentren-Schalenmodell mit Yukawa-potential, l·s-Kraft und l^2-Term wird entwickelt. Dabei werden verschiedene Arten der Volumenerhaltung untersucht. Die Schalenstruktur des sphärischen Ausgangskernes und die der getrennten Fragmente wird reproduziert. Für kleine Deformationen ist das Niveauschema dem des Nilsson-Modells ähnlich. Außerdem wird die Renormierung der liquid drop Energie durch die Schalenkorrektur nach Strutinsky für dieses Modell untersucht.

Inhaltsverzeichnis

I. Einleitung

Man hat bereits mit verschiedenen Modellen versucht, die Kernspaltung zu erklären. Das wichtigste ist bisher immer noch das Tröpfenchenmodell, das ursprünglich von Bohr und Wheeler [1] entwickelt wurde. Der stärkste Einwand gegen dieses Modell und der Beweis dafür, daß es wesentliche Aspekte vernachlässigt, ist die Tatsache, daß es die asymmetrische Spaltung nicht beschreiben kann. Das legt auch die Vermutung nahe, daß Schaleneffekte eine wichtige Rolle spielen.

Das Schalenmodell nach Nilsson hatte große Erfolge in der Beschreibung von Kernzuständen bei kleinen Deformationen. Man hat versucht, es auch auf große Deformationen und sogar auf die Kernspaltung anzuwenden. Hierbei muß es naturgemäß versagen, denn es kann nie zu einer Aufspaltung in zwei Teile kommen, da der tiefste Punkt des Potentials immer im Zentrum bleibt. (Fig.1). Die Gesamtenergie geht für große Deformationen gegen unendlich, da die Nullpunktsenergie des Oszillators in ρ-Richtung unbegrenzt wächst. Ebenso geht auch die liquid drop Energie mit der Oberfläche gegen unendlich.

Um die Kernspaltung im Schalenmodell richtig beschreiben zu können, braucht man ein Potential mit mehreren Zentren. Hier wird das Modell des symmetrischen Zwei-Zentren-Oszillators (Fig.2) [2],[3] durch Einführung der $\ell \cdot s$-Kraft und des ℓ^2-Terms erweitert. Dadurch wird das Termschema des Ausgangskerns und der Fragmente richtig wiedergegeben. Der Hamiltonoperator hat dann die Form

$$H = H_0 + V(\ell, s) \qquad (1)$$

Hierbei ist H_0 der Hamiltonoperator des Zwei-Zentren-Oszillators

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{m}{2}\begin{cases}\left(\omega_z^2 (z+z_0)^2 + \omega_\rho^2 \rho^2\right) & z<0 \\ & \text{für} \\ \left(\omega_z^2 (z-z_0)^2 + \omega_\rho^2 \rho^2\right) & z>0\end{cases} \qquad (2)$$

und $V(\ell,s)$ das Zusatzpotential mit $\ell \cdot s$ - und ℓ^2-Term

$$V(\ell,s) = -\varkappa \hbar \overset{\circ}{\omega}_0 \begin{cases} \left(2\ell_1 \cdot s + \mu\left(\ell_1^2 - \frac{N(N+3)}{2}\right)\right) & z<0 \\ & \text{für} \\ \left(2\ell_2 \cdot s + \mu\left(\ell_2^2 - \frac{N(N+3)}{2}\right)\right) & z>0 \end{cases} \quad (3)$$

ℓ_1 und ℓ_2 beschreiben die Drehimpulse bezüglich der beiden Zentren $z= -z_0$ und $z= +z_0$. Für $z_0=0$ ergibt sich gerade der Hamiltonoperator des Nilsson-Modells in Zylinderkoordinaten und für $z_0 > R$ (R ist der Kernradius) erhält man zwei getrennte Kerne mit Hamiltonoperatoren der gleichen Form. Die für den Bereich der Aktiniden gewöhnlich benutzten Parameter sind $\varkappa = 0.0635$ und $\mu = 0.325$ für Neutronen; und für Protonen $\varkappa = 0.0577$ und $\mu = 0.65$. Im Oszillatormodell setzt man allgemein $\hbar \overset{\circ}{\omega}_0 = 41.A^{-1/3}$ MeV.

Zur Lösung dieses Problems werden die Wellenfunktionen des des Zwei-Zentren-Oszillators [2] als Basisfunktionen genommen und der Hamiltonoperator in dieser Basis diagonalisiert. Dabei zeigt sich (wie auch schon an den Ergebnissen in [2]), daß die Frage der Volumenerhaltung von entscheidender Bedeutung ist. Zunächst wird eine kurze Zusammenfassung des Zwei-Zentren-Oszillators nach [2] gegeben.

II. Der Zwei-Zentren Oszillator

Die Schrödingergleichung

$$H_0 \, \phi_1 = E_{\phi_1} \, \phi_1 \tag{4}$$

mit H_0 aus (2) läßt sich in Zylinderkoordinaten durch den Separationsansatz lösen

$$\phi_1(z, \rho, \varphi) = \psi(z) \, \chi(\rho) \, \nu(\varphi) \tag{5}$$

Nach dem Einsetzen erhält man folgende Differentialgleichungen

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + m^2 \right) \nu = 0 \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{m \omega_\rho^2 \rho^2}{\hbar^2} - A_2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) \chi = 0 \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{m^2 \omega_2^2}{\hbar^2} \left(z^2 - 2|z| z_0 + z_0^2 - \frac{2E}{m \omega_2^2} - \frac{\hbar^2}{m^2 \omega_2^2} A_2 \right) \right) \psi = 0 \tag{8}$$

mit den Lösungen

$$\nu(\varphi) = N_1 \, e^{i m \varphi} \tag{9}$$

mit $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ und der Normierungskonstanten $N_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

$$\chi(\rho) = N_2 \, k_\rho^{\frac{|m|+1}{2}} \, (-)^{\frac{|m|+m}{2}} \, e^{-\frac{k_\rho}{2} \rho^2} \, \rho^{|m|} \, L_n^{|m|}(k_\rho \rho^2) \tag{10}$$

wobei $k_\rho = \frac{m \omega_\rho}{\hbar}$ und $L_n^{|m|}$ ein Laguerr'sches Polynom mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ ist.

$$\psi(z) = \begin{cases} N_{31}\, e^{-\frac{k}{2}(z+z_0)^2}\, \mathcal{U}\left(-\frac{n_z}{2}, \frac{1}{2}, k(z+z_0)^2\right) & z < 0 \\ & \text{für} \\ N_{32}\, e^{-\frac{k}{2}(z-z_0)^2}\, \mathcal{U}\left(-\frac{n_z}{2}, \frac{1}{2}, k(z-z_0)^2\right) & z > 0 \end{cases} \tag{11}$$

$$\equiv \begin{cases} \psi_<(z) & z < 0 \\ \qquad \text{für} & \\ \psi_>(z) & z > 0 \end{cases} \tag{12}$$

mit $k = \frac{m\,\omega_z}{\hbar}$ und

$$\mathcal{U}(a,c,x) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)}\, {}_1F_1(a,c,x) + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}\, x^{1-c}\, {}_1F_1(a-c+1, 2-c, x) \tag{13}$$

wobei ${}_1F_1$ (a,c,x) die konfluente hypergeometrische Reihe und $\Gamma(x)$ die Gammafunktion bedeuten. Die Funktionen $\chi(\rho)$ und $\psi(z)$ sind gegenüber [2] umgeschrieben, so daß man sie etwas besser handhaben kann, insbesondere sind die Konstanten in $\psi(z)$ schon so bestimmt, daß

$$\left.\begin{aligned} \psi_>(z) &\xrightarrow[z\to\infty]{} 0 \\ \psi_<(z) &\xrightarrow[z\to-\infty]{} 0 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Dadurch wird die Bedeutung der Eigenwertgleichungen für n_z klar, die man jetzt allein aus den beiden Anschlußbedingungen für z = 0 erhält.

1. $$\psi_<(z=0) = \psi_>(z=0) \tag{15}$$

$$\Rightarrow (N_{31} - N_{32})\, e^{-\frac{k}{2} z_0^2}\, \mathcal{M}\left(-\frac{n_z}{2}, \frac{1}{2}, k z_0^2\right) = 0 \tag{16}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} N_{31} = N_{32} & (17) \\ \text{oder} & \\ \mathcal{M}\left(-\frac{n_z}{2}, \frac{1}{2}, k z_0^2\right) = 0 & (18) \end{cases}$$

2. $$\psi'_<(z=0) = \psi'_>(z=0) \tag{19}$$

Mit der Beziehung

$$\mathcal{M}'(a,c,x) = -a\, \mathcal{M}(a+1, c+1, x) \tag{20}$$

folgt hieraus

$$(N_{31} + N_{32})\, e^{-\frac{k}{2} z_0^2} \left[k z_0\, \mathcal{M}\left(-\frac{n_z}{2}, \frac{1}{2}, k z_0^2\right) - k z_0 n_z\, \mathcal{M}\left(\frac{2-n_z}{2}, \frac{3}{2}, k z_0^2\right) \right] = 0 \tag{21}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} N_{31} = -N_{32} & (22) \\ \text{oder} & \\ \mathcal{M}\left(-\frac{n_z}{2}, \frac{1}{2}, k z_0^2\right) - n_z\, \mathcal{M}\left(\frac{2-n_z}{2}, \frac{3}{2}, k z_0^2\right) = 0 & (23) \end{cases}$$

Die Eigenwerte n_z sind also für "negative Parität" (in z-Richtung) (22) gerade die Nullstellen der Wellenfunktion $\psi(z=0,n_z)$ (18) und für "positive Parität"(17) die Nullstellen der Ableitung

der Wellenfunktion $\frac{\delta}{\delta z}(\psi(z,n_z))/_{z=0}$ (23).

In [2] wurde anhand der Einteilchenniveaus gezeigt, daß die Zustände im Endstadium (zwei getrennte Fragmente) bezüglich der "Parität" (in z-Richtung) entartet sind. In Figur 3 - 6 wird am Verlauf der ersten vier z-Wellenfunktionen (d.h. der Wellenfunktionen mit den ersten vier Eigenwerten n_{z1}, n_{z2}, n_{z3}, n_{z4}) für U^{236} bei verschiedenen Deformationen nochmal diese Entartung gezeigt. Für große z_o gehen die erste und die zweite bzw. die dritte und die vierte ineinander über (wegen der Erhaltung der "Parität" für $z < 0$ natürlich mit verschiedenen Vorzeichen). Man sieht auch deutlich, daß für große z_o die ersten beiden Wellenfunktionen, "positive" und die nächsten beiden "negative Parität" bezüglich der beiden Zentren $z = -z_o$ und $z = z_o$ haben. Die "Parität" zur Mitte z=0 ist hier physikalisch bedeutungslos, was auch schon daraus hervorgeht, daß die z-Wellenfunktionen für asymmetrische Spaltung keine "gute Parität" bezüglich z=0 haben können, sondern nur bezüglich der beiden Zentren.

Zur numerischen Behandlung sei noch erwähnt, daß n_z nur eine Funktion von kz_o^2, d.h. von $\omega_z\, z_o^2$ ist (wie man aus den Gleichungen (18) und (23) sieht), also nicht für jeden Kern und jede Deformation neu berechnet zu werden braucht, wenn es einmal für den interessanten Bereich von $\omega_z\, z_o^2$ tabelliert wurde.

Zusätzlich zu den Rechnungen in [2] wird für die Bestimmung von Matrixelementen die Normierung der Wellenfunktionen benötigt. Die Rechnungen hierzu sind in Anhang A durchgeführt. Für die Normierungskonstanten aus (10) und (11) erhält man:

$$N_2 = \sqrt{\frac{2\, n!}{(|m| + n)!}} \qquad (24)$$

Die Normierungskonstanten N_{31} und N_{32} müssen zum Teil numerisch berechnet werden.

$$N_{32} = \left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2})^2}{\sqrt{2}\; \Gamma(-\frac{n_z}{2})\Gamma(\frac{1-n_z}{2})} \left(\Psi(\frac{1-n_z}{2}) - \Psi(-\frac{n_z}{2}) \right) + 2 Z e_1 \right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (25)$$

Für die Herleitung dieses Ausdrucks und die Definition des numerischen Teils Ze_1 siehe Anhang A.

$\Psi(x)$ bedeutet hier die Psi-Funktion

$$\Psi(x) \equiv \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

N_{31} erhält man dann je nach "Parität", also je nachdem, ob n_z aus (23) oder (18) bestimmt wurde, aus Gleichung (17) oder (22).

III. Erweiterung des Zwei-Zentren-Oszillators

Wie in Kapitel I dargestellt, wird zu dem Hamiltonoperator des Zwei-Zentren-Oszillators ein Zusatzpotential mit $\ell \cdot s$ und ℓ^2-Term hinzugefügt, das sich beim Einzentrenoszillator (Nilsson) für kleine Deformationen sehr gut bewährt hat. Um die Energieniveaus dieses Hamiltonoperators zu erhalten, wird er in der Basis der Wellenfunktionen

$$\phi(z,\rho,\varphi,s) = \phi_1(z,\rho,\varphi)\,\sigma(s) \tag{26}$$

mit ϕ_1 aus (5) und der Spinwellenfunktion $\sigma(s)$ diagonalisiert, d.h. es sind die Matrixelemente $\langle \phi'|H|\phi \rangle$ zu berechnen. Man erhält nach (1)

$$\langle \phi'|H|\phi \rangle = \langle \phi'|H_0|\phi \rangle + \langle \phi'|V(\ell,s)|\phi \rangle \tag{27}$$

und nach (4)

$$= E_\phi\, \delta_{n_z' n_z}\, \delta_{\nu' \nu}\, \delta_{m' m}\, \delta_{s' s} + \langle \phi'|V(\ell,s)|\phi \rangle \tag{28}$$

Das Zusatzpotential $V(\ell,s)$ hat nach (3) die Form

$$V(\ell,s) = -\kappa \hbar \overset{\circ}{\omega}_0 \left[2\,\ell\cdot s + \mu \left(\ell^2 - \frac{N(N+3)}{2} \right) \right] \tag{29}$$

mit

$$\ell \cdot s = \begin{cases} \ell_1 \cdot s & z < 0 \\ & \text{für} \\ \ell_2 \cdot s & z > 0 \end{cases} \tag{30}$$

und

$$\ell^2 = \begin{cases} \ell_1^2 & \\ & \text{für} \\ \ell_2^2 & \end{cases} \quad \begin{matrix} z < 0 \\ \\ z > 0 \end{matrix} \tag{31}$$

Die Matrixelemente des drehimpulsabhängigen Potentials spalten also folgendermaßen auf

$$\langle \phi' | V(\ell, s) | \phi \rangle = - \varkappa \hbar \mathring{\omega}_0 \Big[2 \langle \phi' | \ell \cdot s | \phi \rangle +$$

$$+ \mu \Big(\langle \phi' | \ell^2 | \phi \rangle - \frac{N(N+3)}{2} \delta_{n_z' n_z} \delta_{n' n} \delta_{m' m} \delta_{s' s} \Big) \Big] \tag{32}$$

Die verbleibenden beiden Matrixelemente werden in den beiden nächsten Kapiteln behandelt.

IV. Matrixelemente $<\phi'|\ell\cdot s|\,\phi>$

Der Drehimpulsoperator ℓ hat in der Komponentenschreibweise in kartesischen Koordinaten die Form

$$\ell_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{33}$$

und zyklisch vertauscht für die anderen Komponenten. Da er hier in Zylinderkoordinaten gebraucht wird. machen wir die entsprechende Transformation

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

und erhalten

$$\ell_x = -i\hbar\left(\rho\sin\varphi\frac{\partial}{\partial z} - z\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho} - z\frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \tag{36}$$

$$l_y = -i\hbar\left(-\rho\cos\varphi\frac{\partial}{\partial z} + z\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho} - z\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \qquad (37)$$

$$l_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} \qquad (38)$$

oder in der oft praktischeren Schreibweise

$$\left.\begin{aligned} l^+ &= l_x + i\,l_y \\ l^- &= l_x - i\,l_y \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

$$\left.\begin{aligned} l_x &= \frac{l^+ + l^-}{2} \\ l_y &= \frac{l^+ - l^-}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

$$\Longrightarrow \quad l^+ = -\hbar e^{i\varphi}\left[\rho\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{iz}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] \qquad (41)$$

$$l^- = \hbar e^{-i\varphi}\left[\rho\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{iz}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] \qquad (42)$$

Benutzt man den Spinoperator s in der entsprechenden Schreibweise

$$\left.\begin{aligned} s_x &= \frac{s^+ + s^-}{2} \\ s_y &= \frac{s^+ - s^-}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

so gelten für diese Komponenten die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} s_z \,|\tfrac{1}{2}| \rangle &= \tfrac{\hbar}{2}\,|\tfrac{1}{2}\rangle \\ s_z \,|-\tfrac{1}{2}|\rangle &= -\tfrac{\hbar}{2}\,|-\tfrac{1}{2}\rangle \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

$$\left.\begin{aligned} s^+ |\tfrac{1}{2}\rangle &= 0 \\ s^+ |-\tfrac{1}{2}\rangle &= \hbar\,|\tfrac{1}{2}\rangle \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

$$\left.\begin{aligned} s^- |\tfrac{1}{2}\rangle &= \hbar\,|-\tfrac{1}{2}\rangle \\ s^- |-\tfrac{1}{2}\rangle &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Für den Operator $\ell \cdot s$ ergibt sich also in dieser Schreibweise

$$\ell \cdot s = \ell_x s_x + \ell_y s_y + \ell_z s_z \tag{47}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\ell^+ s^- + \ell^- s^+\right) + \ell_z s_z \tag{48}$$

Damit kann man das gesuchte Matrixelement aufspalten

$$\langle \phi' | \ell \cdot s | \phi \rangle = \langle \phi' | \tfrac{1}{2}(\ell^+ s^- + \ell^- s^+) + \ell_z s_z | \phi \rangle \tag{49}$$

$$\begin{aligned} &= \tfrac{1}{2} \langle \phi_1' | \ell^+ | \phi_1 \rangle \, \delta_{s's-1} + \\ &+ \tfrac{1}{2} \langle \phi_1' | \ell^- | \phi_1 \rangle \, \delta_{s's+1} + \\ &+ \langle \phi_1' | \ell_z | \phi_1 \rangle \, s \, \delta_{s's} \end{aligned} \tag{50}$$

mit ϕ_1 aus (24). (Das $\hbar$ aus den Operatoren ist wie bei Nilsson in die Koeffizienten aus (3) gezogen). Das letzte dieser drei Matrixelemente läßt sich sofort angeben

$$\langle \phi' | \ell_z | \phi \rangle = \langle \psi'(z)\, \chi'(\rho) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{im'\varphi} \left| -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \right| \psi(z)\, \chi(\rho) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{im\varphi} \rangle \tag{51}$$

$$\Rightarrow \quad \langle \phi' | \ell_z | \phi \rangle = m\, \delta_{n_z' n_z}\, \delta_{n' n}\, \delta_{m' m} \tag{52}$$

Die längeren Rechnungen zur Bestimmung der beiden anderen Matrixelemente sind in Anhang C durchgeführt. Es ergeben sich ohne Ausführung der z-Integration, die wie bei der Normierung z.T. wieder numerisch gelöst werden muß, jeweils zwei Typen von Matrixelementen ungleich Null

$$\langle n_z'\; N_\rho+1\; m+1 | \ell^+ | \phi_1 \rangle = \sqrt{\frac{N_\rho+m+2}{2k_\rho}}\, \langle \psi' | k_\rho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \psi \rangle \tag{53}$$

$$\langle n_z'\; N_\rho-1\; m+1 | \ell^+ | \phi_1 \rangle = \sqrt{\frac{N_\rho-m}{2k_\rho}}\, \langle \psi' | k_\rho z' - \frac{\partial}{\partial z'} | \psi \rangle \tag{54}$$

$$\langle n_z'\; N_\rho-1\; m-1 | \ell^- | \phi_1 \rangle = -\sqrt{\frac{N_\rho+m}{2k_\rho}}\, \langle \psi' | k_\rho z' - \frac{\partial}{\partial z'} | \psi \rangle \tag{55}$$

$$\langle n_z'\; N_\rho+1\; m-1 | \ell^- | \phi_1 \rangle = \sqrt{\frac{N_\rho-m+2}{2k_\rho}}\, \langle \psi' | k_\rho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \psi \rangle \tag{56}$$

mit den Definitionen

$$N_\rho = 2n + |m| \qquad \text{(s. (C 12)} \qquad (57)$$

$$z' = \begin{cases} z + z_0 & \text{für } z < 0 \\ z - z_0 & \phantom{\text{für }} z > 0 \end{cases} \qquad (58)$$

$$|\Phi_1\rangle = |n_z \; N_\rho \; m\rangle \qquad (59)$$

Da die Energiematrix symmetrisch ist, gilt zum Beispiel

$$\langle n_z' \; N_\rho+1 \; m+1 \; s-1 \,|\, \ell\cdot s \,|\, n_z \; N_\rho \; m \; s\rangle = \langle n_z \; N_\rho \; m \; s \,|$$

$$|\, \ell\cdot s \,|\, n_z' \; N_\rho+1 \; m+1 \; s-1\rangle \qquad (60)$$

nach (50), (53) und (55) folgt für die beiden Seiten dieser Gleichung

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{N_\rho+m+2}{2\,k_\rho}}\,\langle\psi'|\,k_\rho z' + \frac{\partial}{\partial z'}\,|\psi\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{N_\rho+m+2}{2\,k_\rho}}\,\langle\psi|\,k_\rho z' - \frac{\partial}{\partial z'}\,|\psi'\rangle \qquad (61)$$

$$\Longrightarrow \langle\psi'|\,k_\rho z' + \frac{\partial}{\partial z'}\,|\psi\rangle = \langle\psi\,|\,k_\rho z' - \frac{\partial}{\partial z'}\,|\psi'\rangle \qquad (62)$$

für beliebiges ψ und ψ'
d.h. man braucht nur die z-Matrixelemente von einer der beiden auftretenden Formen zu berechnen. Dies ist im Anhang D für den Operator ($k_\rho z' + \frac{\partial}{\partial z'}$) durchgeführt. Das Ergebnis ist,

wenn beide Oszillatoren kugelförmig sind, d.h. $k = k_\varrho$

$$\langle \psi' | k_\varrho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \psi \rangle_{z>0} = N'_{3z} N_{3z} \frac{n_z}{2} \left(Z_{e2} + \frac{2\,\Gamma(\frac{1}{2})^2}{n_z - n'_z - 1} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left[\frac{1}{\Gamma(1 - \frac{n_z}{2})\,\Gamma(-\frac{n'_z}{2})} \quad \frac{1}{\Gamma(\frac{1-n_z}{2})\,\Gamma(\frac{1-n'_z}{2})} \right] \right) \tag{63}$$

(Definition vom numerischen Teil z_{e2} im Anhang D). Für $k \neq k_\varrho$ muß noch ein weiteres Integral berechnet werden, das sich jedoch nicht (auch nicht in den Grenzen 0 bis ∞) analytisch lösen läßt. Eine günstige Entwicklung zur numerischen Lösung wird im Anhang D skizziert.

Das vollständige Matrixelement $\langle \psi' | k_\varrho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \psi \rangle$ (von $-\infty$ bis $+\infty$) ist je nach der "Parität" (in z-Richtung) von ψ' und ψ

$$\langle \psi' | k_\varrho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \psi \rangle = \begin{cases} 2\,\langle \psi' | k_\varrho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \psi \rangle_{z>0} & \psi', \psi \text{ verschiedene "Parität"} \\ & \text{für} \\ 0 & \psi', \psi \text{ gleiche "Parität"} \end{cases}$$

V. Matrixelemente $<\phi'|\ell^2|\phi>$

Analog zum Operator $\ell.s$ in Kapitel IV (48) läßt sich der Operator ℓ^2 in der Form schreiben

$$\ell^2 = \frac{1}{2}\left(\ell^+\ell^- + \ell^-\ell^+\right) + \ell_z^2 \tag{64}$$

mit den Komponenten aus (38), (41) und (42). Damit erhält man für das gesuchte Matrixelement

$$\langle \phi'|\ell^2|\phi\rangle = \delta_{s's}\left[\frac{1}{2}\langle \phi_1'|\ell^+\ell^-|\phi_1\rangle + \frac{1}{2}\langle \phi_1'|\ell^-\ell^+|\phi_1\rangle + \right.$$
$$\left. + \langle \phi_1'|\ell_z^2|\phi_1\rangle\right] \tag{65}$$

Auch hier kann man wieder das letzte Matrixelement sofort angeben.

$$\langle \phi_1'|\ell_z^2|\phi_1\rangle = \langle \Psi'\chi'\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{im'\varphi}|-\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}|\Psi\chi\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{im\varphi}\rangle \tag{66}$$

$$= m^2\, \delta_{n_z' n_z}\, \delta_{n'n}\, \delta_{m'm} \tag{67}$$

Die anderen beiden erhält man nach dem Einschieben einer "vollständigen Eins" aus den in Kapitel IV berechneten Matrixelementen für ℓ^+ und ℓ^- (53) - (56)

$$\langle \phi_1'|\ell^+\ell^-|\phi_1\rangle = \sum_{\phi_1''}\langle \phi_1'|\ell^+|\phi_1''\rangle\langle \phi_1''|\ell^-|\phi_1\rangle \tag{68}$$

Nach einigen Zwischenrechnungen, die im Anhang E angegeben sind, kommt man zu drei Typen von Matrixelementen, die ungleich

Null sind

$$\langle n_z' N_\rho m | \tfrac{1}{2}(\ell^+\ell^- + \ell^-\ell^+) | \Phi_1 \rangle = \frac{1}{4 k_\rho} \sum_{\Phi_1''} \Big(\delta_{N_\rho'' N_\rho - 1} \cdot$$

$$\cdot \left[(N_\rho + m)\, \delta_{m'' m-1} + (N_\rho - m)\, \delta_{m'' m+1} \right] \langle \Psi' | k_\rho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \Psi'' \rangle \cdot$$

$$\cdot \langle \Psi'' | k_\rho z' - \frac{\partial}{\partial z'} | \Psi \rangle \; +$$

$$+ \delta_{N_\rho'' N_\rho + 1} \left[(N_\rho - m + 2)\, \delta_{m'' m-1} + (N_\rho + m + 2)\, \delta_{m'' m+1} \right] \cdot$$

$$\cdot \langle \Psi' | k_\rho z' - \frac{\partial}{\partial z'} | \Psi'' \rangle \langle \Psi'' | k_\rho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \Psi \rangle \Big) \quad (69)$$

$$\langle n_z' N_\rho + 2 \; m | \tfrac{1}{2}(\ell^+\ell^- + \ell^-\ell^+) | \Phi_1 \rangle = \frac{1}{4 k_\rho} \sum_{\Phi_1''} \delta_{N_\rho'' N_\rho + 1} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{(N_\rho + 2)^2 - m^2} \left[\delta_{m'' m-1} + \delta_{m'' m+1} \right] \langle \Psi' | k_\rho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \Psi'' \rangle \cdot$$

$$\cdot \langle \Psi'' | k_\rho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \Psi \rangle \quad (70)$$

$$\langle n_z' N_\rho - 2 \; m | \tfrac{1}{2}(\ell^+\ell^- + \ell^-\ell^+) | \Phi_1 \rangle = \frac{1}{4 k_\rho} \sum_{\Phi_1''} \delta_{N_\rho'' N_\rho - 1} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{N_\rho^2 - m^2} \left[\delta_{m'' m-1} + \delta_{m'' m+1} \right] \langle \Psi' | k_\rho z' - \frac{\partial}{\partial z'} | \Psi'' \rangle \cdot$$

$$\cdot \langle \Psi'' | k_\rho z' - \frac{\partial}{\partial z'} | \Psi \rangle \quad (71)$$

VI. Volumenerhaltung

In [2] wurden ω_ϱ und ω_z nach rein geometrischen Überlegungen so bestimmt, daß nur das Volumen in der Äquipotentialfläche, die mit der Kernoberfläche zusammenfällt, erhalten bleibt. Das führt natürlich zu starken Dichteschwankungen, wie man am Beispiel der Fig.7 gut sieht. In dem Ausgangskern Fig.7a und in den beiden getrennten Fragmenten Fig.7c haben alle entsprechenden Äquipotentialflächen dasselbe Volumen V, denn es gilt

$$\mathcal{V}_a = \frac{4\pi}{3} R_a^3 \tag{72}$$

$$\mathcal{V}_c = 2 \cdot \frac{4\pi}{3} R_c^3 \tag{73}$$

wobei die Radien R_a und R_c durch das Potential V gegeben sind

$$V = \frac{m}{2} \omega_a^2 R_a^2 \tag{74}$$

$$V = \frac{m}{2} \omega_c^2 R_c^2 \tag{75}$$

und nach dem Oszillatormodell gilt

$$\hbar \omega_a = 41 \cdot A^{-\frac{1}{3}} \tag{76}$$

$$\hbar \omega_c = 41 \cdot \left(\frac{A}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \tag{77}$$

$$\Longrightarrow \quad R_a = \sqrt{\frac{2 V A^{\frac{2}{3}}}{m \hbar^2 \, 41^2}} \tag{78}$$

$$R_c = \sqrt{\frac{2VA^{\frac{2}{3}}}{m\hbar^2 41^2 \cdot 2^{\frac{2}{3}}}} \tag{79}$$

Damit erhält man für das Volumen

$$V_a = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{2VA^{\frac{2}{3}}}{m\hbar^2 41^2}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{80}$$

$$V_c = 2\cdot\frac{4\pi}{3}\left(\frac{2VA^{\frac{2}{3}}}{m\hbar^2 41^2\cdot 2^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{81}$$

$$\Longrightarrow \quad V_a = V_c$$

Dies gilt für jede Äquipotentialfläche innerhalb des Kerns (bzw. bei größerem Abstand der beiden Bruchstücke für jede, die aus zwei Kreisen besteht). In Fig.7 ist eine dieser Äquipotentialflächen gestrichelt eingezeichnet. Diese hat in Fig.7b ganz offenstichtlich ein größeres Volumen als in Fig.7c (und damit nach (82) auch als in Fig.7a), da die Oszillatorfrequenz $\omega = \omega_z = \omega_\varrho$ in Fig.7b kleiner ist als in Fig.7c (wegen der Volumenerhaltung innerhalb der Oberfläche).

Dieses größere Volumen für die unteren Äquipotentialflächen bei kleinen Deformationen bewirkt eine Absenkung der einzelnen Energieniveaus und in der Gesamtenergie ein unrealistisches Minimum von 190 MeV unter der Energie des Ausgangskerns bei U^{236} (Fig.8, Kurve 1). Die Verbesserung des Modells durch die in den vorangehenden Kapiteln eingeführten $\ell\cdot s$- und ℓ^2-Terme ändert an dieser grundlegenden Situation nichts wesentliches. Es bleibt immer noch ein "Energieloch" mit einer Differenz von 110 MeV zum Ausgangs- und 190 MeV zum Endzustand in der aufsummierten Einteilchenenergie (Fig.8, Kurve 2).

Der nächste Schritt muß also sein, die Dichteschwankungen zu verringern. Die naheliegenste Forderung ist dann, daß das Volumen jeder Äquipotentialfläche erhalten bleibt. (Eigentlich müßte man

fordern, daß die Dichte der Kernmaterie, bestimmt aus den Wellenfunktionen, erhalten bleibt, da man weiß, daß die Kernmaterie in guter Näherung inkompressibel ist.)

Man erreicht dies, indem man zu der Oszillatorfrequenz ω im Potential von (2) einen Faktor $\varphi(V, z_0)$ hinzufügt und diesen so bestimmt, daß er das Volumen jeder Äquipotentialfläche erhält. Dies wird hier für den Fall durchgeführt, daß die beiden Bruchstücke immer Kugelabschnitte sind, d.h. $\omega_z = \omega_\rho = \omega_0$. Dann ist die Gleichung einer Äquipotentialfläche gegeben durch

$$\begin{aligned} V &= \frac{m\,\omega_0^2}{2}\,\varphi^2\left(\rho^2 + (|z| - z_0)^2\right) \\ &\equiv V_0\,\varphi^2 \end{aligned} \tag{83}$$

Wir können uns im weiteren auf $z \geqslant 0$ beschränken, da hier nur der symmetrische Fall behandelt wird. Das Volumen wird dann einfach verdoppelt. Die beiden Enden z_1^+, z_2^+ einer Äquipotentialfläche (mit dem konstanten Potential $V = V_0\,\varphi^2$) auf der positiven z-Achse erhält man aus der Bedingung

$$\rho(z^+) = 0 \tag{84}$$

eingesetzt in (83)

$$V_0 = \frac{m\omega_0^2}{2}\,(z^+ - z_0)^2 \tag{85}$$

$$\Longrightarrow \qquad z_{1/2}^+ = z_0 \pm \sqrt{\frac{2V_0}{m\,\omega_0^2}} \tag{86}$$

Das Volumen dieser Äquipotentialfläche erhält man durch Integration über $\pi\rho^2$ in diesen Grenzen

$$v = 2\int_{z_2^+}^{z_1^+} \pi\rho^2(z)\,dz \tag{87}$$

und mit (83)

$$\vartheta = 2\pi \int_{z_2^+}^{z_1^+} \left(\frac{2V_0}{m\,\omega_0^2} - (z - z_0)^2 \right) dz \tag{88}$$

$$\Longrightarrow \quad \vartheta = 2\pi \left[\left(\frac{2V_0}{m\,\omega_0^2} - z_0^2 \right) z + z_0 z^2 - \frac{1}{3} z^3 \right]_{z_2^+}^{z_1^+} \tag{89}$$

Hierbei ist noch eine Fallunterscheidung zu machen, denn $z_2^+ < 0$ bedeutet, daß die betrachteten Äquipotentialflächen der beiden Bruchstücke noch zusammenhängen. Dann muß die untere Integrationsgrenze gleich Null gesetzt werden.

1. Fall: Getrennte Äquipotentialflächen

$$z_2^+ \geqslant 0$$

In diesem Fall ergibt (86) eingesetzt in (89)

$$\vartheta = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{2V_0}{m\,\omega_0^2} \right)^{\frac{3}{2}} \tag{90}$$

2. Fall: Zusammenhängende Äquipotentialflächen

$$z_2^+ < 0$$

$$\vartheta = 2 \int_0^{z_1^+} \pi \rho^2(z)\, dz \tag{91}$$

Hier wird nur z_1^+ aus (86) eingesetzt und die untere Integrationsgrenze Null gesetzt. Man erhält mit (89)

$$\vartheta = \frac{2\pi}{3} \left[2 \left(\frac{2V_0}{m\,\omega_0^2} \right)^{\frac{3}{2}} + 3\, \frac{2V_0}{m\,\omega_0^2}\, z_0 - z_0^3 \right] \tag{92}$$

Das Volumen der entsprechenden Äquipotentialfläche im sphärischen Ausgangskern ist

$$v_s = \frac{4\pi}{3} R_s^3 \tag{93}$$

mit dem Potential

$$V = \frac{m\,\mathring{\omega}_0^2}{2} R_s^2 \tag{94}$$

$$\Longrightarrow \qquad v_s = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2V}{m\,\mathring{\omega}_0^2} \right)^{\frac{3}{2}} \tag{95}$$

Aus der Definition $V = V_0\,\varphi^2$ (83) und der Forderung der Volumenerhaltung

$$v = v_s \tag{96}$$

ergibt sich für φ

1. Fall: $z_2^+ \geqslant 0$

$$\frac{8\pi}{3} \left(\frac{2V_0}{m\,\omega_0^2} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2V_0}{m\,\mathring{\omega}_0^2} \right)^{\frac{3}{2}} \varphi^3 \tag{97}$$

$$\Longrightarrow \qquad \varphi = \sqrt[3]{2}\;\frac{\mathring{\omega}_0}{\omega_0} \tag{98}$$

Im Oszillatormodell gilt

$$\hbar\,\mathring{\omega}_0 = 41 \cdot A^{-\frac{1}{3}} \tag{99}$$

$$\Longrightarrow \qquad \hbar\,(\omega_0 \cdot \varphi) = 41 \cdot \left(\frac{A}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \tag{100}$$

d.h. die Frequenz $\omega_0\varphi$ ist für getrennte Äquipotentialflächen gerade gleich der für getrennte Kerne. Das war auch zu erwarten, da oben (82) gezeigt wurde, daß dann das Volumen erhalten bleibt.

2. Fall: $z_2^+ < 0$

$$\frac{2\pi}{3}\left[2\left(\frac{2V_0}{m\omega_0^2}\right)^{\frac{3}{2}} + 2\,\frac{2V_0}{m\omega_0^2}\,z_0 - z_0^3\right] = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{2V_0}{m\mathring{\omega}_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}\varphi^3 \tag{101}$$

setzt man jetzt V_0 aus (83) ein, erhält man für φ

$$\varphi = \frac{\mathring{\omega}_0}{\omega_0}\left[1 + \frac{3}{2}\,\frac{z_0}{\sqrt{\rho^2 + (z-z_0)^2}} - \frac{1}{2}\,\frac{z_0^3}{\sqrt{\rho^2 + (z-z_0)^2}^{\,3}}\right]^{\frac{1}{3}} \tag{102}$$

Es sei noch erwähnt, daß V auch beim Übergang von Fall 1 zu Fall 2 stetig und differenzierbar ist.

Im Hamiltonoperator

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_0 + V(l,s) \tag{103}$$

muß jetzt also V_0 durch $V = V_0\varphi^2$ ersetzt werden. Dadurch erhält man einen zusätzlichen Term, der auch noch in der benutzten Basis diagonalisiert werden muß

$$H_1 = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V + V(l,s) \tag{104}$$

$$\Longrightarrow \quad H_1 = H + V_0 \cdot (\varphi^2 - 1) \tag{105}$$

Die benötigten Matrixelemente haben also die Form

$$\langle \phi' | H_1 | \phi \rangle = \langle \phi' | H | \phi \rangle + \langle \phi' | V_0 (\varphi^2 - 1) | \phi \rangle \tag{106}$$

Dieses zusätzliche Matrixelement ist ein Doppelintegral

$$\langle \phi' | V_0 (\varphi^2 - 1) | \phi \rangle_{z>0} = \delta_{s's}\, \delta_{m'm} \frac{m\omega_0^2}{2} \int_0^\infty dz\, \psi'(z)\, \psi(z) \cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty d\rho\, \chi'(\rho)\, \chi(\rho)\, (\rho^2 - 1)\, (\rho^2 + (z - z_0)^2)\, \rho \tag{107}$$

das sich wegen der komplizierten Abhängigkeit $\varphi(z, \rho)$ nicht analytisch angeben läßt. Zur numerischen Lösung entwickelt man zweckmäßig die ρ -Funktionen in eine Reihe. Das ist günstig, da die auftretenden Reihen abbrechen und maximal 7 Glieder haben bei maximalen m = 12 (d.h. bis zur Schale mit der Hauptquantenzahl N = 12). Dann kann man die Integration über die dreizehn auftretenden ρ -Potenzen für eine Deformation z_0 und die benötigten z-Werte einmal durchführen und braucht bei den einzelnen Matrixelementen nur die Koeffizienten der Glieder des

Reihenproduktes neu zu bestimmen und numerisch über z zu integrieren. Da diese numerische Doppelintegration mit vernünftiger Genauigkeit trotzdem sehr viel Rechenzeit kostet und da es auch nur in Sonderfällen (wie hier bei der Spaltung in zwei Kugeln) möglich ist, φ explizit anzugeben, erscheint es zweckmäßig zu untersuchen, ob das volumenerhaltende Potential mit ausreichender Genauigkeit durch ein mittleres ersetzt werden kann. Eine derartige Untersuchung für ein Lawrence-Potential hat K. Albrecht in Frankfurt durchgeführt. Er mittelte über den volumenerhaltnenden Faktor φ nach dem allgemeinen Ansatz

$$\overline{\left(\frac{1}{\varphi}\right)^{i}} = \frac{\int_0^{V_0} dV\, V^K \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{i}}{\int_0^{V_0} dV\, V^K} \tag{108}$$

und erhielt gute Ergebnisse für i = 1 und K = 2. Das erscheint auch physikalisch sinnvoll, da mit K = 2 das Potential bei höheren Schalen entsprechend der Besetzung stärker gewichtet wird. Mit diesem mittleren Potential (d.h. in (2) wird $\omega_z = \omega_\rho = \omega_0$ durch $\omega_0 \cdot \overline{\varphi}$ ersetzt), das nicht mehr genau der Volumenerhaltung innerhalb der Oberfläche entspricht, sondern innerhalb einer Äquipotentialfläche, die etwas tiefer liegt, erhält man ein völlig anderes Ergebnis. Die Gesamtenergie ist in Fig.8 mit eingezeichnet und zwar in Kurve 3 ohne und in Kurve 4 mit $\ell \cdot s$ - und ℓ^2-Term und in Fig.8a Kurve 1 mit $\ell \cdot s$ und ℓ^2-Term plus Coulombenergie. Statt des tiefen "Energieloches" zeigt sich jetzt eine Spaltbarriere von ca 40 MeV. Auch das ist physikalisch noch unrealistisch (obwohl keine Spaltschwellen bei Uran für symmetrische Spaltung gemessen sind, wird man kaum höhere Schwellen als beim symmetrisch spaltenden Blei - ca 20 MeV - erwarten). Es ist auch klar, daß für ein mittleres Potential, dessen Mittelungsvorschrift für dieses Modell noch nicht näher untersucht und optimal gefittet wurde, nicht auf Anhieb bessere Ergebnisse zu erwarten sind. Außerdem ist ein strittiger

Punkt der Mittelungsvorschrift noch besonders hervorzuheben: Hier wurde integriert von 0 bis V_0, d.h. bis zum Potential an der Kernoberfläche (ca 30 MeV). Man müßte aber wohl mindestens bis zur Fermikante mitteln, die ca 20 MeV höher liegt, oder vielleicht sogar bis zu den höheren Niveaus, die bei der Diagonalisierung mitgenommen werden. Dann wird man sich sicher noch stärker an die Ergebnisse mit simultaner Volumenerhaltung für jede Äquipotentialfläche annähern. Diese Schwierigkeit wird durch die Einführung eines realistischen Potentials (cutt-off-Oszillator oder Saxon-Wood) umgangen. In Fig.9, 10 und 11 sind die unteren Einteilchen-Energieniveaus der Neutronen für die drei Arten der Volumenerhaltung dargestellt. Dabei fällt besonders in Fig.9 (Volumenerhaltung nur in der Oberfläche) das starke Absinken der Niveaus am Anfang auf. Außerdem sieht man in diesen Figuren sehr schön die Nilsson-Niveaus für den Ausgangskern und für die getrennten Fragmente und bei letzteren auch die doppelte Besetzung jedes Niveaus (da es zwei Kerne sind). In Fig.12, 13, 14 und 15 sind die Energieniveaus um die Fermikante für Protonen und Neutronen für mittlere und simultane Volumenerhaltung eingezeichnet. Aus ihnen kann man ablesen, für welche Teilchenzahlen bei bestimmten Deformationen besonders niedrige Gesamtenergien zu erwarten sind, d.h. deformierte Grundzustände bzw. zweite Energieminima. In Fig.8 Kurve 5 ist die Gesamtenergie mit simultaner Volumenerhaltung und $\ell \cdot s$ und ℓ^2-Term dargestellt.

Wie die Kurve 2 in Fig.8a zeigt, ergibt die Gesamtenergie mit simultaner Volumenerhaltung, $\ell \cdot s$- und ℓ^2-Term und Coulombenergie eine Spaltschwelle von ca 20 MeV, kommt also für symmetrische Spaltung durchaus in die realistische Größenordnung. Eine Unstimmigkeit fällt allerdings in der Gesamtenergie sofort auf: U^{236} müßte nach diesem Modell einen sphärischen Grundzustand haben. Das liegt daran, daß vorläufig nur sphärische Bruchstücke ($\omega_z = \omega_\rho = \omega_0$) betrachtet wurden. Läßt man statt dessen auch Ellipsoide, d.h. unterschiedliche z- und ρ -Achsen (a_z, a_ρ) zu, erhält man praktisch eine Kombination aus dem Nilsson-Modell und dem Zwei-Zentren-Oszillator, wie man in Fig.16 sieht.

Auf der einen Achse ist der halbe Abstand der beiden Zentren z_o aufgetragen und auf den zweiten das Achsenverhältnis a_z/a_ρ. Auf der ersten Achse hat man also genau das hier behandelte Modell des "sphärischen" Zwei-Zentren-Oszillators und auf der zweiten das Nilsson-Modell. Sucht man nun für jedes z_o das Energieminimum in Abhängigkeit von a_z/a_ρ , wird man etwa einen Spaltweg in der Form der eingezeichneten Linie erwarten. Er startet am Minimum des Nilsson-Modells und endet bei zwei getrennten Kernen mit kleinerer Deformation. Man hat damit die Vorteile beider Modelle gekoppelt.

VII. Schalenkorrektur nach Strutinsky

Strutinsky hat ein "Rezept" angegeben [5] (besonders ausführlich dargestellt und untersucht bei Tsang [6]) um aus dem asymptotisch falschen Nilsson-Modell die Schaleneinflüsse zu extrahieren. Man hofft, realistische Spaltbarrieren zu erhalten, wenn man diese Schalenkorrekturen zu der liquid drop Energie addiert (die allerdings bei Nilsson asymptotisch auch falsch ist, da die Oberfläche für große Deformationen gegen unendlich geht). Im Nilsson-Modell hat sich gezeigt, daß diese Schalenkorrektur weitgehend unabhängig von der benutzten Art der Volumenerhaltung ist.

Wenn dieses Verfahren korrekt ist, würde man erwarten, daß für ein realistisches Schalenmodell der Verlauf der Summe der Einteilchenenergien für verschiedene Abstände der Bruchstücke äquivalent ist zur liquid drop Energie mit Schalenkorrektur.

Besonders auffällig bei der Strutinsky-Renomierung ist das Auftreten mehrerer Minima in der Gesamtenergie. Das bedeutet die Existenz isomerer Zustände. In der Gesamtenergie der Schalenmodelle ist bisher noch kein zweites Minimum beobachtet worden. Das kann natürlich in unserem Fall daran liegen, daß noch einige notwendige Verbesserungen an dem schematischen Modell vorzunehmen sind,die im nächsten Kapitel noch diskutiert werden.

Für die besprochenen drei Arten der Volumenerhaltung wurde die Schalenkorrektur berechnet. (Das Programm für die Rechenmaschine wurde von Herrn Albrecht erstellt). Auch im Zwei-Zentren-Oszillator zeigt sich, daß diese Schalenkorrektur von der Volumenerhaltung weitgehend unabhängig ist (Fig.17) (wenn man davon absieht, daß die geringen Abweichungen doch sehr große Unterschiede in den Halbwertszeiten bedeuten würden). Es sieht auch so aus, als ob ein zweites Minimum auftritt, was allderdings ohne die zugehörige liquid drop Energie noch nicht zu entscheiden ist. Aber in unserem Modell ist die liquid drop Energie wegen der Spitzen zwischen den beiden Fragmenten (d.h. sehr rasch

wachsende Oberfläche) und deren Kugelform (d.h. zu große Coulombenergie) unrealistisch mit einer Spaltbarriere von ca 40 MeV (Fig.18, Kurve 1). Dadurch wird das zweite Minimum der Schalenkorrektur völlig ausgeschmiert (Fig.18, Kurve 2). Hierbei wurden zur Berechnung der liquid drop Energie

$$E_{LD} = -a_1 (1 - K I^2) A + a_2 (1 - K I^2) A^{\frac{2}{3}} \cdot f(\text{shape}) + E_C \qquad (109)$$

die Parameter von Myers und Swiatecki [7] benutzt:

$$I = (N - Z)/A \qquad (110)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 15.4941 \text{ MeV} \\ a_2 = 17.9439 \text{ MeV} \\ K = 1.7826 \end{array}\right\} \qquad (111)$$

und f(shape) ist das Verhältnis der jeweiligen Oberfläche zu der des sphärischen Ausgangskerns und E_C die Coulombenergie.

In Fig.19 sind noch die Gesamtenergie und die Schalenkorrektur für den symmetrisch spaltenden Kern Po^{210} gezeigt.

VIII. Zusammenfassung der Ergebnisse

Die Verbesserung des Zwei-Zentren-Oszillators durch die Einführung des $\ell \cdot s$- und ℓ^2-Terms bringt ein korrektes Termschema (nach Nilsson) für den Ausgangskern und für die getrennten Fragmente (Fig.9, 10, 11). Man sieht hier auch den größeren Schalenabstand und die doppelte Entartung jeden Niveaus im Endzustand, da zwei identische getrennte Kerne vorliegen. Die Figuren zeigen außerdem, daß bei größeren Kernabständen die niedrigen Niveaus bereits vollständig entartet sind, weil nämlich die Barriere zwischen den Fragmenten die unteren Niveaus schon trennt, während die höheren Zustände nahe der Fermikante noch zu dem gemeinsamen Potential beider Kerne gehören und deshalb aufspalten. (Siehe dazu Fig.2). Man könnte diesen Zustand als Kernmolekül betrachten, analog zu den Molekülen, bei denen die äußeren Elektronen zum Potential mehrerer Atome gehören, während die unteren jeweils fest an eins gebunden sind. Diese Vorstellung, daß nur noch die "Valenznukleonen" nahe der Fermikante und ihre Schalenstruktur im Endstadium den Spaltprozeß bestimmen, ist auch bereits aus experimentellen Daten bekannt [8].

Bei der Untersuchung der Niveaudichte in der Nähe der Fermikante (Fig.12, 13, 14, 15) (Bereiche kleiner Niveaudichte bewirken Minima in der Gesamtenergie [9],[10])müssen wir uns auf Neutronenzahlen zwischen 120 und 138 beschränken, denn nur in diesem Bereich sind Kerne bekannt, die symmetrisch spalten. Man beobachtet in Fig.15 einen Bereich geringerer Niveaudichte für N = 128 bis N = 136 bei z_0 = 4 fm bis z_0 = 3 fm. In diesem Bereich wären also isomere Zustände zu erwarten.

Der Verlauf der Energieniveaus im Zwischenbereich ist stark von der Art der Volumenerhaltung abhängig. Eigentlich müßte Volumenerhaltung für die Kernmaterie gefordert werden (und konstante Dichte). Dies entspricht wegen der Kurzreichweitigkeit der Kernkräfte fast der Forderung nach Volumenerhaltung für jede Äquipotentialfläche. Es muß aber noch genauer untersucht werden, ob diese Näherung ausreicht, da die Abhängigkeit von der Volumen-

erhaltung sehr empfindlich ist. Diese Schwierigkeit könnte man zwar umgehen, indem man das Verfahren von Strutinsky benutzt. Man brauchte nur eine Kernoberfläche mit einer realistischeren liquid-drop Barriere (etwa wie Nix [11])zu benutzen,und die Schalenkorrektur darauf zu addieren. Aber das "Rezept" von Strutinsky ist physikalisch noch zu wenig begründet und erst realistische Schalenmodellrechnungen können über die Brauchbarkeit entscheiden. Die Gesamtenergie als Summe der Einteilchenenergien zeigt eine für die symmetrische Spaltung von Uran etwa zu erwartende Spaltschwelle von 20 MeV. Da es hierfür aber keine experimentellen Werte gibt, ist der nächste wichtige Schritt die Verallgemeinerung des Modells auf die asymmetrische Spaltung, damit es am Experiment getestet werden kann. Dann könnte dieses Modell uns helfen, die asymmetrische Spaltung und den Einfluß der Schalenstruktur der Bruchstücke auf sie zu verstehen.

Außerdem müssen, wie oben bereits erwähnt, auch deformierte Bruchstücke zugelassen werden (d.h. $\omega_z \neq \omega_\rho$), damit der deformierte Grundzustand reproduziert werden kann.
Ein weiterer Punkt, der noch genauer untersucht und im Modell verfeinert werden muß, betrifft die Barriere zwischen den Fragmenten. Der Einfachheit halber und um analytische Basiszustände zu bekommen, haben wir uns zunächst darauf beschränkt, die beiden Potentiale auf einer Höhe zusammenstoßen zu lassen. Weiter mußte man aber noch fordern, daß die Steigerung des Potentials zwischen den Fragmenten auch stetig übergeht. Die Höhe dieser Barriere sollte als weiterer Parameter noch variabel bleiben.
Einer Erweiterung auf realistischere Potentiale vom Typ Saxon-Wood steht dann nichts mehr im Weg. Zum Schluß sei noch erwähnt, daß diese Modell sich ohne große Änderungen und ohne prinzipielle Schwierigkeiten auch auf die Mehrfachspaltung, die bei der Erforschung superschwerer Elemente wichtig wird, übertragen läßt.

Anhang A

Normierung der Wellenfunktionen

Die Wellenfunktion $v(\varphi)$ aus (9) ist bereits normiert mit $N_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, denn

$$\int_0^{2\pi} v'^* v \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-im'\varphi} e^{im\varphi} \, d\varphi \tag{A1}$$

$$= \delta_{m'm} \tag{A2}$$

Das entsprechende Integral für die ρ-Funktionen hat die Form

$$I_2 \equiv \int_0^\infty \chi'^*(\rho)\, \chi(\rho)\, \rho \, d\rho \stackrel{!}{=} \delta_{n'n} \tag{A3}$$

und mit (10)

$$I_2 = N_2' N_2 \int_0^\infty e^{-k_\rho \rho^2} (\sqrt{k_\rho}\, \rho)^{2|m|} L_{n'}^{|m|}(k_\rho \rho^2)\, L_n^{|m|}(k_\rho \rho^2)\, k_\rho \rho \, d\rho \tag{A4}$$

wobei benutzt wurde, daß m' = m nach (A2). Man führt eine Koordinatentransformation aus

$$x = k_\rho \rho^2 \Rightarrow k_\rho \rho \, d\rho = \frac{1}{2} dx \tag{A5}$$

$$\Longrightarrow I_2 = \frac{N_2' N_2}{2} \int_0^\infty e^{-x} x^{|m|} L_{n'}^{|m|}(x)\, L_n^{|m|}(x)\, dx \tag{A6}$$

Unter Benutzung der Orthogonalitätsrelationen für die Laguerre'schen Polynome (F1) ergibt sich

$$I_2 = \frac{N_2' N_2}{2} \frac{(|m| + n)!}{n!} \delta_{n'n} \stackrel{!}{=} \delta_{n'n} \tag{A7}$$

$$\Longrightarrow \qquad \underline{N_2 = \sqrt{\frac{2n!}{(|m| + n)!}}} \tag{A8}$$

Für die z-Wellenfunktionen hat man die entsprechende Bedingung

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi'^*(z)\, \Psi(z)\, dz \stackrel{!}{=} \delta_{n_z' n_z} \tag{A9}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \Psi_<'^*(z)\, \Psi_<(z)\, dz + \int_{0}^{\infty} \Psi_>'^*(z)\, \Psi_>(z)\, dz \tag{A10}$$

nach (12). Da die Funktionen mit den nach (18) und (23) bestimmten Eigenwerten n_z orthogonal sind (Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten eines hermiteschen Operators) und da $\psi(z)$ reell ist, kann man schreiben

$$I_3 = \delta_{n_z' n_z} \left[\int_{-\infty}^{0} \Psi_<^2(z)\, dz + \int_{0}^{\infty} \Psi_>^2(z)\, dz \right] \tag{A11}$$

Wir beschränken uns hier auf den Fall der symmetrischen Spaltung. Deshalb sind die beiden Integrale identisch, denn es gilt nach (17) und (22) für die beiden Normierungskonstanten N_{31} $(z < o)$

$$N_{31}^2 = N_{32}^2 \tag{A12}$$

Bei der Berechnung können wir also $z < o$ wählen.

$$I_3 = 2 \cdot \int_0^\infty \psi_>^2(z)\, dz \tag{A13}$$

$$= 2 \cdot N_{32}^2 \int_0^\infty e^{-k(z-z_0)^2}\, \mathcal{U}^2\left(-\frac{n_z}{2}, \frac{1}{2}, k(z-z_0)^2\right) dz \tag{A14}$$

nach (11). Nach folgender Aufspaltung des Integrals läßt sich der Wert eines Teils analytisch angeben:

$$I_3 = 2 \int_0^{z_0} \psi_>^2(z)\, dz + 2 \cdot \int_{z_0}^\infty \psi_>^2(z)\, dz \tag{A15}$$

denn mit der Koordinatentransformation

$$x = k\,(z-z_0)^2 \qquad dz = \frac{dx}{2\sqrt{kx}} \tag{A16}$$

gehen die Integrale über in

$$I_3 = 2\, N_{32}^2 \Bigg[\underbrace{\int_{kz_0^2}^{0} e^{-x}\, x^{-\frac{1}{2}}\, \mathcal{U}^2\left(-\frac{n_z}{2}, \frac{1}{2}, x\right) \frac{1}{2\sqrt{k}}\, dx}_{\equiv Z_{e_1}} +$$

$$+ \int_0^\infty e^{-x}\, x^{-\frac{1}{2}}\, \mathcal{U}^2\left(-\frac{n_z}{2}, \frac{1}{2}, x\right) \frac{1}{2\sqrt{k}}\, dx \Bigg] \tag{A17}$$

$$\Rightarrow \quad I_3 = N_{32}^2 \left[2\, Z_{e_1} + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{k}\, \Gamma\left(-\frac{n_z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-n_z}{2}\right)} \left[\psi\left(\frac{1-n_z}{2}\right) - \psi\left(-\frac{n_z}{2}\right) \right] \right] \tag{A18}$$

nach Gleichung (B9) aus Anhang B. Mit der Bedingung, daß dieses Integral gleich eins sein soll (A9), erhält man die Normierungskonstante wie in (25) angegeben.

Anhang B

Integrale mit U(a,c,x)

Mit Hilfe des analytisch lösbaren Integrals aus [4] (p. 287,(24))

$$\int_0^\infty e^{-t} t^\rho \, {}_1F_1(a,c,t) \, \mathcal{U}(a',c',\lambda t) \, dt = C \cdot \frac{\Gamma(c)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)} \cdot \lambda^\sigma \cdot$$

$$\cdot \, {}_2F_1(c-a, \beta; \gamma; 1-\lambda^{-1}) \qquad \text{(B1)}$$

für entweder

$$\left.\begin{array}{l} \rho = c-1 \quad \sigma = -c \quad \beta = c-c'+1 \quad \gamma = c-a+a'-c'+1 \\ C = \dfrac{\Gamma(a'-a)}{\Gamma(a')} \end{array}\right\} \qquad \text{(B2)}$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} \rho = c+c'-2 \quad \sigma = 1-c-c' \quad \beta = c+c'-1 \\ \gamma = a'-a+c \quad C = \dfrac{\Gamma(a'-a-c'+1)}{\Gamma(a'-c'+1)} \end{array}\right\} \qquad \text{(B3)}$$

lassen sich einige der in dieser Arbeit benötigten Integrale angeben.

Für die Normierung im Anhang A (A17) tritt ein Integral der Form auf:

$$\mathcal{J}_1 = \int_0^\infty e^{-t} t^\rho \, \mathcal{U}(a,c,t) \, \mathcal{U}(a',c',\lambda t) \, dt \tag{B4}$$

mit

$$c = c' = \tfrac{1}{2} \qquad \lambda = 1 \qquad \rho = -\tfrac{1}{2} \tag{B5}$$

Unter der Benutzung der Definition von U(a,c,x) in (13) geht es über in

$$\mathcal{J}_1 = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} \int_0^\infty e^{-t} t^\rho \, {}_1F_1(a,c,t) \, \mathcal{U}(a',c',\lambda t) \, dt \; +$$

$$+ \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\rho+1-c} \, {}_1F_1(a-c+1, 2-c, t) \, \mathcal{U}(a',c',\lambda t) \, dt \tag{B6}$$

Das erste dieser beiden Integrale erfüllt die Bedingungen (B2) und das zweite die Bedingungen (B3). Damit erhält man nach (B1)

$$\mathcal{J}_1 = \frac{\Gamma(1-c)\,\Gamma(a'-a)\,\Gamma(c)}{\Gamma(a-c+1)\,\Gamma(a')\,\Gamma(a'-a+1)} + \frac{\Gamma(c-1)\,\Gamma(a'-a)\,\Gamma(2-c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(a'-c+1)\,\Gamma(a'-a+1)} \tag{B7}$$

$$= \frac{\Gamma(1-c)\,\Gamma(c)}{a'-a} \left[\frac{1}{\Gamma(a')\,\Gamma(a-c+1)} - \frac{1}{\Gamma(a)\,\Gamma(a'-c+1)} \right] \tag{B8}$$

Für a = a' erhält man mit der Regel von l'Hospital

$$\mathcal{J}_1(a'=a) = \frac{(c-1)\,\Gamma(1-c)\,\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(a-c+1)} \Big[\psi(a-c+1) - \psi(a) \Big] \tag{B9}$$

mit der Psi-Funktion $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$. Bei der Berechnung der z-Integration in Anhang D tritt ein Integral der Form auf

$$\mathcal{J}_2 = \int_0^\infty e^{-t} t^{\rho}\, \mathcal{U}(a,c,t)\, \mathcal{U}(a',c',\lambda t)\, dt \tag{B10}$$

$$\text{mit} \qquad c = \tfrac{1}{2} = c' - 1 \qquad \lambda = 1 \qquad \rho = 0 \tag{B11}$$

Hier erhält man mit der Definition (13)

$$\mathcal{J}_2 = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} \int_0^\infty e^{-t}\, {}_1F_1(a,c,t)\, \mathcal{U}(a',c',\lambda t)\, dt \; +$$

$$+ \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-t} t^{1-c}\, {}_1F_1(a-c+1, 2-c, t)\, \mathcal{U}(a',c',\lambda t)\, dt \tag{B12}$$

Das erste Integral erfüllt die Bedingungen (B3) und das zweite (B2). Damit erhält man

$$\mathcal{J}_2 = \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(a'-a-c)\Gamma(c)\Gamma(2c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(a'-c)\Gamma(a'-a+c)} + \frac{\Gamma(c-1)\Gamma(a'-a+c-1)\Gamma(2-c)\Gamma(2-2c)}{\Gamma(a)\Gamma(a')\Gamma(a'-a-c+1)} \tag{B13}$$

oder, wenn man $c = \frac{1}{2}$ einsetzt

$$\mathcal{J}_2 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^2}{a'-a-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(a'-\frac{1}{2})} - \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(a')} \right] \qquad \text{B14)}$$

Anhang C

Matrixelemente $\langle \phi_1' | \ell^+ | \phi_1 \rangle$, $\langle \phi_1' | \ell^- | \phi_1 \rangle$

Zur Berechnung dieser Matrixelemente bestimmen wir zuerst $\ell^+|\phi_1\rangle$ und $\ell^-|\phi_1\rangle$. Mit den Definitionen (41), (42), (5) und (58) erhält man

$$\ell^{\pm} | \phi_1 \rangle = \mp e^{\pm i\varphi} \left[\rho \frac{\partial}{\partial z'} - z' \frac{\partial}{\partial \rho} \mp \frac{iz}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \psi(z) \chi(\rho) \nu(\varphi) \tag{C1}$$

und mit (9) und (10)

$$\ell^{\pm} | \phi_1 \rangle = \frac{N_2}{\sqrt{2\pi}} k_\rho^{\frac{|m|+1}{2}} (-)^{\frac{|m|+m}{2}} e^{i(m\pm 1)\varphi} e^{-\frac{k_\rho}{2}\rho^2} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \left[\pm(|m| \mp m) \rho^{|m|-1} z' \psi(z) \mp \rho^{|m|+1} \left(k_\rho z' \psi(z) + \frac{\partial \psi(z)}{\partial z'} \right) \right] L_n^{|m|} (k_\rho \rho^2) \mp \right.$$

$$\left. \mp 2 k_\rho \rho^{|m|+1} L_{n-1}^{|m|+1} (k_\rho \rho^2) z' \psi(z) \right\} \tag{C2}$$

Hieran sieht man, daß für die Ausführung der Integrale eine Falluntersuchung gemacht werden muß: $m > 0$ und $m < 0$ (da m und $|m|$ auftreten). Die im folgenden auftretenden Integrale ${}_{\nu}I_{n',n}$ sind in Anhang F berechnet. Außerdem werden die Normierungskonstanten (24) benötigt.

<u>**1. Fall**</u> m > 0

$$< \phi_1' | \ell^+ | \phi_1 > = - N_2' N_2 (-)^{\frac{4m+2}{2}} k_\rho^{\frac{2|m|+3}{2}} \delta_{m'm+1} \Big[< \Psi' | k_\rho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \Psi > \cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty e^{-k_\rho \rho^2} \rho^{2|m|+2} L_{n'}^{|m+1|} (k_\rho \rho^2) L_n^{|m|} (k_\rho \rho^2) \rho \, d\rho + 2 k_\rho < \Psi' | z' | \Psi > \cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty e^{-k_\rho \rho^2} \rho^{2|m|+2} L_{n'}^{|m|+1} (k_\rho \rho^2) \underset{n \neq 0}{L_{n-1}^{|m|+1}} (k_\rho \rho^2) \rho \, d\rho \Big]$$

(C3)

$$= N_2' N_2 \delta_{m'm+1} \Big[< \Psi' | k_\rho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \Psi >_2 I_{n'n} + 2 k_\rho < \Psi' | z' | \Psi > {}_1 I_{n'n} \Big] \qquad (C4)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k_\rho}} < \Psi' | k_\rho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \Psi > \sqrt{n + |m| + 1} \cdot \delta_{n'n} \delta_{m'm+1} + \qquad (C5)$$

$$+ \sqrt{\frac{n}{k_\rho}} < \Psi' | k_\rho z' - \frac{\partial}{\partial z'} | \Psi > \underset{n \neq 0}{\delta_{n'n-1}} \delta_{m'm+1}$$

dies gilt auch für m = 0

$$< \phi_1' | \ell^- | \phi_1 > = - N_2' N_2 (-)^{\frac{4m+2}{2}} k_\rho^{\frac{2|m|+1}{2}} \delta_{m'm-1} \Big[2|m| < \Psi' | z' | \Psi > \cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty e^{-k_\rho \rho^2} \rho^{2(|m|-1)} L_{n'}^{|m|-1} (k_\rho \rho^2) L_n^{|m|} (k_\rho \rho^2) \rho \, d\rho - < \Psi' | k_\rho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \Psi > \cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty e^{-k_\rho \rho^2} \rho^{2|m|} L_{n'}^{|m|-1} L_n^{|m|} \rho \, d\rho - 2 k_\rho < \Psi' | z' | \Psi > \int_0^\infty e^{-k_\rho \rho^2} \rho^{2|m|} L_{n'}^{|m|-1} \underset{n \neq 0}{L_{n-1}^{|m|+1}} \rho \, d\rho \Big]$$

(C6)

(wobei die Laguerre'schen Polynome wie auch im folgenden jeweils vom Argument $(k_\rho \rho^2)$ zu nehmen sind.)

$$= N_2' N_2 \, \delta_{m'm-1} \Big[2|m| \langle \Psi' | z' | \Psi \rangle \, {}_3I_{n'n} - \langle \Psi' | k_\rho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \Psi \rangle_5 I_{n'n} -$$

$$- 2 k_\rho \langle \Psi' | z' | \Psi \rangle \, {}_4I_{n'n} \Big] \tag{C7}$$

$$\langle \phi_1' | \ell^- | \phi_1 \rangle = N_2' N_2 \, \delta_{m'm-1} \Big[- \langle \Psi' | k_\rho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \Psi \rangle_5 I_{n'n} +$$

$$+ 2(|m| + n) \langle \Psi' | z' | \Psi \rangle \, \delta_{n'n} \, {}_3I_{n'n} \Big] \tag{C8}$$

$$= \sqrt{\frac{n+|m|}{k_\rho}} \, \langle \Psi' k_\rho z' - \frac{\partial}{\partial z'} | \Psi \rangle \, \delta_{n'n} \, \delta_{m'm-1} +$$

$$+ \sqrt{\frac{n+1}{k_\rho}} \, \langle \Psi' | k_\rho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \Psi \rangle \, \delta_{n'n+1} \, \delta_{m'm-1} \tag{C9}$$

2. Fall $m < 0$

Die Rechnungen für diesen Fall sind ganz analog zu denen des ersten. Es ändern sich nur einige Vorzeichen (s. C2). Als Ergebnis erhält man

$$\langle \phi_1' | \ell^+ | \phi_1 \rangle = \sqrt{\frac{n+|m|}{k_\rho}} \, \langle \Psi' | k_\rho z' - \frac{\partial}{\partial z'} | \Psi \rangle \, \delta_{n'n} \, \delta_{m'm+1} +$$

$$+ \sqrt{\frac{n+1}{k_\rho}} \, \langle \Psi' | k_\rho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \Psi \rangle \, \delta_{n'n+1} \, \delta_{m'm+1} \tag{C10}$$

$$\langle \phi_1' | \ell^- | \phi_1 \rangle = \sqrt{\frac{n+|m|+1}{k_\rho}} \, \langle \psi' | k_\rho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \psi \rangle \, \delta_{n'n} \, \delta_{m'm-1} \, +$$

$$+ \sqrt{\frac{n}{k_\rho}} \, \langle \psi' | k_\rho z' - \frac{\partial}{\partial z'} | \psi \rangle \, \delta_{\substack{n'n-1 \\ n \neq 0}} \, \delta_{m'm-1} \qquad \text{(C11)}$$

dies gilt auch für m = 0.
Jetzt sieht man, daß man durch die Definition einer neuen Quantenzahl N_ρ statt n die Fallunterscheidung überflüssig machen kann

$$N_\rho = 2n + |m| \qquad \text{(C12)}$$

denn damit erhält man

$$\langle \phi_1' | \ell^+ | \phi_1 \rangle = \sqrt{\frac{N_\rho + m + 2}{2 k_\rho}} \, \langle \psi' | k_\rho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \psi \rangle \, \delta_{N_\rho' N_\rho + 1} \, \delta_{m'm+1} \, +$$

$$+ \sqrt{\frac{N_\rho - m}{2 k_\rho}} \, \langle \psi' | k_\rho z' - \frac{\partial}{\partial z'} | \psi \rangle \, \delta_{N_\rho' N_\rho - 1} \, \delta_{m'm+1} \qquad \text{(C13)}$$

$$\langle \phi_1' | \ell^- | \phi_1 \rangle = \sqrt{\frac{N_\rho + m}{2 k_\rho}} \, \langle \psi' | k_\rho z' - \frac{\partial}{\partial z'} | \psi \rangle \, \delta_{N_\rho' N_\rho - 1} \, \delta_{m'm-1} \, +$$

$$+ \sqrt{\frac{N_\rho - m + 2}{2 k_\rho}} \, \langle \psi' | k_\rho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \psi \rangle \, \delta_{N_\rho' N_\rho + 1} \, \delta_{m'm-1} \qquad \text{(C14)}$$

Anhang D

z-Matrixelemente $\langle \psi' | k_\rho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \psi \rangle$

Zuerst wird die rechte Seite des Integranden bestimmt unter Benutzung von (11), (20) und (58). Dabei können wir uns auf z>0 beschränken, da nur die symmetrische Spaltung behandelt wird.

$$\left(k_\rho z' + \frac{\partial}{\partial z'}\right)\Psi(z) = N_{32}\, e^{-\frac{k}{2}z'^2}\Big[(k_\rho - k)z'\,\mathcal{U}\left(-\tfrac{n_2}{2}, \tfrac{1}{2}, kz'^2\right) + \\ + k\, n_2 z'\,\mathcal{U}\left(1-\tfrac{n_2}{2}, \tfrac{3}{2}, kz'^2\right)\Big] \qquad \text{(D1)}$$

Für den hier behandelten Fall, daß die Bruchstücke Kugeln sind, gilt $k_\rho = k$, d.h. der erste Summand verschwindet.

$$\Rightarrow \left\langle \Psi' \middle| k_\rho z' + \frac{\partial}{\partial z'} \middle| \Psi \right\rangle_{z>0} = N'_{32} N_{32} \int_{z=0}^{z=\infty} e^{-kz'^2} k n_2 z'\, \mathcal{U}\left(-\tfrac{n'_2}{2}, \tfrac{1}{2}, kz'^2\right) \cdot \\ \cdot\, \mathcal{U}\left(1-\tfrac{n_2}{2}, \tfrac{3}{2}, kz'^2\right) dz' \qquad \text{(D2)}$$

Wir machen wie in Anhang A die Aufspaltung in zwei Integrale (von 0 bis z_0 und von z_0 bis ∞) und die Koordinatenstranformation

$$x = kz'^2 \qquad dz' = \frac{dx}{2} \qquad \text{(D3)}$$

$$\langle \Psi' | k_\rho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \Psi \rangle_{z>0} = N_{32}' N_{32} \frac{n_2}{2} \left| \int_{k z_0^2} e^{-x} U\left(-\frac{n_2'}{2}, \frac{1}{2}, x\right) U\left(1-\frac{n_2}{2}, \frac{3}{2}, x\right) dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty e^{-x} U\left(-\frac{n_2'}{2}, \frac{1}{2}, x\right) U\left(1-\frac{n_2}{2}, \frac{3}{2}, x\right) dx \right| \tag{D4}$$

Das zweite dieser beiden Integrale läßt sich analytisch angeben nach (B14) aus Anhang B.

$$\Rightarrow \langle \Psi' | k_\rho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \Psi \rangle_{z>0} = N_{32}' N_{32} \frac{n_2}{2} \left[Ze_2 + \frac{2\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{n_2 - n_2' - 1} \right.$$

$$\left. \cdot \left(\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{n_2}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{n_2'}{2}\right)} - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1-n_2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-n_2'}{2}\right)} \right) \right] \tag{D5}$$

Für den Fall deformierter Bruchstücke ($k_\rho \neq k$) treten nach (D1) und (D3) zwei weitere Integrale in den Grenzen wie in (D4) auf. Von diesen läßt sich auch das in den Grenzen von 0 bis ∞ nicht analytisch angeben.

$$\int_0^\infty e^{-x} U\left(-\frac{n_2'}{2}, \frac{1}{2}, x\right) U\left(-\frac{n_2}{2}, \frac{1}{2}, x\right) dx$$

Wenn man aber $U\left(-\frac{nz'}{2}, \frac{1}{2}, x\right)$ explizit als Reihe aufschreibt, kann man zur Lösung den analytischen Ausdruck benutzen:

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{b-1} U(a, c, t)\, dt = \frac{\Gamma(b)\Gamma(b-c+1)}{\Gamma(a+b-c+1)} \tag{D6}$$

nach [12] p. 860 (6)

Anhang E

Matrixelemente $< \phi_1' | \frac{1}{2}(\ell^+ \ell^- + \ell^- \ell^+ | \phi_1 >$

Zuerst betrachten wir nur den linken Teil des Operators und erhalten mit (68)

$$M_1 = < \phi_1' | \ell^+ \ell^- | \phi_1 > = \sum_{\phi_1''} < \phi_1' | \ell^+ | \phi_1'' > < \phi_1'' | \ell^- | \phi_1 > \qquad \text{(E1)}$$

Das ergibt in der Schreibweise (59) mit (53) - (56), wobei zuerst die beiden möglichen Fälle für das rechte Matrixelement aufgeführt werden (55), (56)

$$M_1 = \sum_{\phi_1''} \Big[< \phi_1' | \ell^+ | n_2'' N_\rho - 1 \; m-1 > < n_2'' N_\rho - 1 \; m-1 | \ell^- | \phi_1 > \delta_{N_\rho'' N_\rho - 1} \delta_{m'' m-1} +$$

$$+ < \phi_1'' | \ell^+ | n_2'' N_\rho + 1 \; m-1 > < n_2'' N_\rho + 1 \; m-1 | \ell^- | \phi_1 > \delta_{N_\rho'' N_\rho + 1} \delta_{m'' m-1} \Big] \qquad \text{(E2)}$$

dann für die linken Matrixelemente nach (53),(54)

$$M_1 = \sum_{\phi_1''} \delta_{m'' m-1} \Big[(< n_2' N_\rho m | \ell^+ | n_2'' N_\rho - 1 \; m-1 > + < n_2' N_\rho - 2 \; m | \ell^+ | n_2'' N_\rho - 1 \; m-1 >)$$

$$\cdot < n_2'' N_\rho - 1 \; m-1 | \ell^- | \phi_1 > \delta_{N_\rho'' N_\rho - 1} + (< n_2' N_\rho + 2 \; m | \ell^+ | n_2'' N_\rho + 1 \; m-1 > +$$

$$+ < n_2' N_\rho m | \ell^+ | n_2'' N_\rho + 1 \; m-1 >) < n_2'' N_\rho + 1 \; m-1 | \ell^- | \phi_1 > \delta_{N_\rho'' N_\rho + 1} \Big] \qquad \text{(E3)}$$

Man erhält also drei Typen von Matrixelementen, nämlich mit

$$N_\rho' = N_\rho \quad N_\zeta' = N_\zeta + 2 \quad N_\zeta' = N_\zeta - 2 \tag{E4}$$

Schreibt man diese Typen einzeln auf und setzt die Ergebnisse aus (53) - (56) ein, erhält man

$$\langle n_2' N_\zeta m | \ell^+ \ell^- | \phi_1 \rangle = \sum_{\phi_1''} \delta_{m'' m-1} \frac{1}{2 k_\zeta} \Big[\delta_{N_\zeta'' N_\zeta - 1} (N_\zeta + m) \langle \psi' | k_\zeta z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \psi'' \rangle \cdot$$

$$\cdot \langle \psi'' | k_\zeta z' - \frac{\partial}{\partial z'} | \psi \rangle + \delta_{N_\zeta'' N_\zeta + 1} (N_\zeta - m + 2) \langle \psi' | k_\zeta z' - \frac{\partial}{\partial z'} | \psi'' \rangle \cdot$$

$$\cdot \langle \psi'' | k_\zeta z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \psi \rangle \Big] \tag{E5}$$

$$\langle n_2' N_\zeta + 2 m | \ell^+ \ell^- | \phi_1 \rangle = \sum_{\phi_1''} \delta_{m'' m-1} \frac{1}{2 k_\zeta} \delta_{N_\zeta'' N_\zeta + 1} \sqrt{(N_\zeta + 2)^2 - m^2} \cdot$$

$$\cdot \langle \psi' | k_\zeta z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \psi'' \rangle \langle \psi'' | k_\zeta z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \psi \rangle \tag{E6}$$

$$\langle n_2' N_\zeta - 2 m | \ell^+ \ell^- | \phi_1 \rangle = \sum_{\phi_1''} \delta_{m'' m-1} \frac{1}{2 k_\zeta} \delta_{N_\zeta'' N_\zeta - 1} \sqrt{N_\zeta^2 - m^2} \cdot$$

$$\cdot \langle \psi' | k_\zeta z' - \frac{\partial}{\partial z'} | \psi'' \rangle \langle \psi'' | k_\zeta z' - \frac{\partial}{\partial z'} | \psi \rangle \tag{E7}$$

Ganz analog erhält man die entsprechenden Beziehungen für den Operator $\ell^- \ell^+$

$$\langle n_2' N_\varrho m | \ell^- \ell^+ | \phi_1 \rangle = \frac{1}{2k_\varrho} \sum_{\phi_1''} \delta_{m''m+1} \Big[\delta_{N_\varrho'' N_\varrho +1} (N_\varrho + m + 2) \langle \psi' | k_\varrho z' - \frac{\partial}{\partial z'} | \psi'' \rangle \cdot$$

$$\cdot \langle \psi'' | k_\varrho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \psi \rangle + \delta_{N_\varrho'' N_\varrho -1} (N_\varrho - m) \langle \psi' | k_\varrho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \psi'' \rangle \cdot$$

$$\cdot \langle \psi'' | k_\varrho z' - \frac{\partial}{\partial z'} | \psi \rangle \Big]$$

(E8)

$$\langle n_2' N_\varrho + 2 m | \ell^- \ell^+ | \phi_1 \rangle = \frac{1}{2k_\varrho} \sum_{\phi_1''} \delta_{m''m+1} \delta_{N_\varrho'' N_\varrho +1} \sqrt{(N_\varrho + 2)^2 - m^2} \cdot$$

$$\cdot \langle \psi' | k_\varrho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \psi'' \rangle \langle \psi'' | k_\varrho z' + \frac{\partial}{\partial z'} | \psi \rangle$$

(E9)

$$\langle n_2' N_\varrho - 2 m | \ell^- \ell^+ | \phi_1 \rangle = \frac{1}{2k_\varrho} \sum_{\phi_1''} \delta_{m''m+1} \delta_{N_\varrho'' N_\varrho -1} \sqrt{N_\varrho^2 - m^2} \cdot$$

$$\cdot \langle \psi' | k_\varrho z' - \frac{\partial}{\partial z'} | \psi'' \rangle \langle \psi'' | k_\varrho z' - \frac{\partial}{\partial z'} | \psi \rangle$$

(E10)

Durch die Addition der entsprechenden Glieder [(E5)+(E8)+(E6)+(E9), (E7) + (E10)] erhält man die in (69), (70) und (71) angegebenen Resultate.

Hier muß noch eine Bemerkung zur numerischen Behandlung gemacht werden: Da diese Integrale für jeden Halbraum ($z > 0$ und $z < 0$) gesondert behandelt werden müssen, muß zum Einschieben der

"vollständigen Eins" (E1) eine neue Normierung der ϕ_1'' erfolgen und zwar so, daß sie in jedem Halbraum auf eins normiert sind. In dem hier behandelten Fall der symmetrischen Spaltung bedeutet das einfach eine Multiplikation mit zwei, da die Funktionen in jedem Halbraum auf $\frac{1}{2}$ normiert sind, aber im asymmetrischen Fall muß die neue Normierung wirklich durchgeführt werden, da sie die Integrale für $z < 0$ und $z > 0$ verschieden wichtet.

Anhang F

Integrale über Laguerre'sche Polynome

Die in Anhang C definierten Integrale ${}_{\nu}I_{n',n}$ lassen sich mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen für die Laguerre'schen Polynome

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_{n'}^{\alpha'}(x)\, L_n^\alpha(x)\, dx = \frac{(\alpha+n)!}{n!}\,\delta_{n'n}\,\delta_{\alpha'\alpha} \tag{F1}$$

angeben. Dabei wird folgende Koordinatentransformation benutzt

$$x = k_\varrho \varrho^2 \qquad \varrho\, d\varrho = \frac{dx}{2 k_\varrho} \tag{F2}$$

$${}_1I_{n'n} = \int_0^\infty e^{-k_\varrho \varrho^2} \varrho^{2(|m|+1)} L_{n'}^{|m|+1}(k_\varrho \varrho^2)\, L_{\substack{n-1\\ n\neq 0}}^{|m|+1}(k_\varrho \varrho^2)\, \varrho\, d\varrho\; k_\varrho^{\frac{2|m|+3}{2}} \tag{F3}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{k_\varrho}} \int_0^\infty e^{-x} x^{|m|+1} L_{n'}^{|m|+1}(x)\, L_{\substack{n-1\\ n\neq 0}}^{|m|+1}(x)\, dx \tag{F4}$$

$${}_1I_{n'n} = \frac{1}{2\sqrt{k_\varrho}}\; \frac{(n+|m|)!}{(n-1)!}\; \delta_{\substack{n'n-1\\ n\neq 0}} \tag{F5}$$

---

nd

$${}_1I_{n'n} = 0 \qquad \text{für} \quad n = 0 \tag{F6}$$

$${}_2I_{n'n} = k_\varrho^{\frac{2|m|+3}{2}} \int_0^\infty e^{-k_\varrho \varrho^2} \varrho^{2|m|+1} L_{n'}^{|m|+1}(k_\varrho \varrho^2)\, L_n^{|m|}(k_\varrho \varrho^2)\, \varrho\, d\varrho \tag{F7}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{k_\varrho}} \int_0^\infty e^{-x} x^{|m|+1} L_{n'}^{|m|+1}(x)\, L_n^{|m|}(x)\, dx \tag{F8}$$

Mit dem Additionstheorem für die Laguerre'schen Polynome

$$L_n^{m-1}(x) = L_n^m(x) - \underset{n \neq 0}{L_{n-1}^m(x)} \tag{F9}$$

ergibt sich hieraus

$$_2I_{n'n} = \frac{1}{2\sqrt{k_\rho}} \left[\int_0^\infty e^{-x} x^{|m|+1} L_{n'}^{|m|+1}(x) \, L_n^{|m|+1} \, dx \; - \right.$$

$$\left. - \int_0^\infty e^{-x} x^{|m|+1} L_{n'}^{|m|+1}(x) \underset{n \neq 0}{L_{n-1}^{|m|+1}}(x) \, dx \right] \tag{F10}$$

$$_2I_{n'n} = \frac{1}{2\sqrt{k_\rho}} \left[\frac{(n+|m|+1)!}{n!} \delta_{n'n} - \frac{(n+|m|)!}{(n-1)!} \underset{n \neq 0}{\delta_{n'n-1}} \right] \tag{F11}$$

$$_3I_{n'n} = k_\rho^{\frac{2|m|+1}{2}} \int_0^\infty e^{-k_\rho \rho^2} \rho^{2(|m|-1)} L_{n'}^{|m|-1}(k_\rho \rho^2) \, L_n^{|m|}(k_\rho \rho^2) \, \rho \, d\rho \tag{F12}$$

$$= \frac{\sqrt{k_\rho}}{2} \int_0^\infty e^{-x} x^{|m|-1} L_{n'}^{|m|-1}(x) \, L_n^{|m|}(x) \, dx \tag{F13}$$

Diesmal wird das Additionstheorem (F9) in etwas erweiterter Form gebraucht

$$L_n^m(x) = L_n^{m-1}(x) + L_{n-1}^m(x) \tag{F14}$$

$$= L_n^{m-1}(x) + L_{n-1}^{m-1}(x) + L_{n-2}^m(x) \tag{F15}$$

$$= L_n^{m-1}(x) + L_{n-1}^{m-1}(x) + L_{n-2}^{m-1}(x) + \dots + L_n^{m-1}(x) \qquad \text{(F16)}$$

Das letzte Glied müßte eigentlich $L_o^m(x)$ heißen, aber es gilt

$$L_o^m(x) = 1 = L_o^{m-1}(x) \qquad \text{(F17)}$$

$$\Rightarrow {}_3I_{n'n} = \frac{\sqrt{k_\varrho}}{2} \int_0^\infty e^{-x} x^{|m|-1} L_{n'}^{|m|-1}(x) \left(L_n^{|m|-1}(x) + L_{n-1}^{|m|-1}(x) + \dots + L_o^{|m|-1}(x) \right) dx \qquad \text{(F18)}$$

$$\underline{{}_3I_{n'n} = \frac{\sqrt{k_\varrho}}{2} \frac{(n-\nu+|m|-1)!}{(n-\nu)!} \delta_{n'n-\nu}} \qquad \text{für } 0 \leq \nu \leq n \qquad \text{(F19)}$$

$${}_4I_{n'n} = k_\varrho^{\frac{2|m|+1}{2}} \int_0^\infty e^{-k_\varrho \varrho^2} \varrho^{2|m|} L_{n'}^{|m|-1}(k_\varrho \varrho^2) L_{n-1}^{|m|+1}(k_\varrho \varrho^2) \varrho \, d\varrho \qquad \text{(F20)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{k_\varrho}} \int_0^\infty e^{-x} x^{|m|} L_{n'}^{|m|-1}(x) L_{n-1}^{|m|+1}(x) \, dx \qquad \text{(F21)}$$

und mit (F9) für $L_{n'}^{|m|-1}(x)$ und (F16) für $L_{n-1}^{|m|+1}(x)$

$${}_4I_{n'n} = \frac{1}{2\sqrt{k_\varrho}} \int_0^\infty e^{-x} x^{|m|} \left[L_{n'}^{|m|}(x) - L_{n'-1}^{|m|}(x) \right] \left[L_{n-1}^{|m|}(x) + L_{n-2}^{|m|}(x) + \dots + L_o^{|m|}(x) \right] dx \qquad \text{(F22)}$$

$${}_4I_{n'n} = \frac{1}{2\sqrt{k_\varrho}} \left[\frac{(n-\nu+|m|-1)!}{(n-\nu-1)} \delta_{n'n-\nu-1} - \frac{(n-\nu'+|m|-1)!}{(n-\nu'-1)!} \right] \text{für } 0 \leq \nu, \nu' \leq n-1 \qquad \text{(F23)}$$

Ein Vergleich mit ${}_3I_{n!n}$ zeigt, daß

$$
{}_4I_{n'n} = \begin{cases} \frac{|m|}{k_\varrho}\, {}_3I_{n'n} & \text{für } n' \neq n \\ -\frac{n}{k_\varrho}\, {}_3I_{nn} & \qquad\; n' = n \end{cases} \tag{F24}
$$

$$
{}_5I_{n'n} = k_\varrho^{\frac{2|m|+1}{2}} \int_0^\infty e^{-k_\varrho \varrho^2} \varrho^{2|m|} L_{n'}^{|m|-1}(k_\varrho \varrho^2)\, L_n^{|m|}(k_\varrho \varrho^2)\, \varrho \, d\varrho \tag{F25}
$$

$$
= \frac{1}{2\sqrt{k_\varrho}} \int_0^\infty e^{-x} x^{|m|} L_{n'}^{|m|-1}(x)\, L_n^{|m|}(x)\, dx \tag{F26}
$$

das ergibt mit (F9)

$$
{}_5I_{n'n} = \frac{1}{2\sqrt{k_\varrho}} \int_0^\infty e^{-x} x^{|m|} \left(L_{n'}^{|m|}(x) - L_{n'-1}^{|m|}(x) \right) L_n^{|m|}\, dx \tag{F27}
$$

$$
{}_5I_{n'n} = \frac{1}{2\sqrt{k_\varrho}} \quad \frac{(n+|m|)!}{n!} \left(\delta_{n'n} - \delta_{n'-1,n} \right) \tag{F28}
$$

Literaturangaben

[1] N. Bohr and J. Wheeler, Phys.Rev. 56, 421 (1939)

[2] P. Holzer, Diplomarbeit, Universität Frankfurt 1969

[3] P. Holzer, U. Mosel and W. Greiner, Nucl.Phys. A138,(1969)241

[4] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger,and G.F. Tricomi, Higher Transcendental Functions, Bateman

[5] V.M. Strutinsky, Nucl.Phys. A95 (1967) 420

[6] C.-F. Tsang, Ph.D. Thesis, Univ. of California, Berkeley UCRL - 18899 (1967)

[7] W.D. Myers and W.J. Swiatecki, Nucl.Phys. 81 (1969) 1

[8] E. Konecny and H.W. Schmitt, Phys.Rev. 172 (1968) 1213

[9] V.M. Strutinsky, Nucl.Phys. A122 (1968) 1

[10] U. Mosel and W. Greiner, Z.Phys. 222 (1969) 261

[11] J.R. Nix, Further Studies in the Liquid-Drop Theory of Nuclear Fission, University of California, Berkeley, UCRL - 17985 (1968)

[12] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, Tables of Integrals, Series and Products, Academic Press (1965)

Beschreibung der Figuren

Fig.1 Nilsson-Modell für drei Deformationen Null, mittlere, asymptotische

a.) Oberfläche des Kerns

b.) Potential in z-Richtung

c.) Potential in ρ-Richtung

Fig.2 wie 1 für Zwei-Zentren-Oszillator

Fig.3 z-Wellenfunktionen der untersten vier n_z-Werte bei $z_o = 0$ für U^{236}

a.) n_{z1} und n_{z2}

b.) n_{z3} und n_{z4}

Fig.4 wie 3 mit $z_o = 3.0$ fm

Fig.5 wie 3 mit $z_o = 6.0$ fm

Fig.6 wie 3 mit $z_o = 7.5$ fm

Fig.7 Äquipotentialflächen für verschieden Abstände der beiden Zentren

Fig.8 Gesamtenergie als Summe der Einteilchenenergien für U^{236}

Kurve 1 Volumenerhaltung nur in der Oberfläche

Kurve 2 wie 1 mit $\ell \cdot s$ und ℓ^2-Term

Kurve 3 mittlere Volumenerhaltung
Kurve 4 wie 3 mit $\ell \cdot s$ - und ℓ^2-Term
Kurve 5 simultane Volumenerhaltung für jede Äquipotentialfläche mit $\ell \cdot s$ - und ℓ^2-Term.

Fig.8a Kurve 1 wie Fig.8 Kurve 4 mit Coulombenergie
Kurve 2 wie Fig.8 Kurve 5 mit Coulombenergie.

Fig.9 Untere Einteilchenenergien der Neutronen von U^{236} für Volumenerhaltung nur in der Oberfläche.

Fig.10 wie 9 mit mittlerer Volumenerhaltung.

Fig.11 wie 9 mit simultaner Volumenerhaltung.

Fig.12 Einteilchenenergien um die Fermikante für Neutronen von U^{236} und mittlere Volumenerhaltung.

Fig.13 wie 12 für Protonen.

Fig.14 wie 12 mit simultaner Volumenerhaltung.

Fig.15 wie 14 für Protonen.

Fig.16 Deformierter Zwei-Zentren-Oszillator mit wahrscheinlichem Spaltweg.

Fig.17 Schalenkorrektur nach Strutinsky für U^{236}
Kurve 1 Volumenerhaltung nur in der Oberfläche
Kurve 2 mittlere Volumenerhaltung
Kurve 3 simultane Volumenerhaltung.

Fig.18 Kurve 1 liquid-drop Energie des Zwei-Zentren-Oszillators für U^{236}

Kurve 2 wie 1 mit Schalenkorrektur aus Fig.17 Kurve 3.

Fig.19 Für Po^{210}

a wie Fig.8 Kurve 5

b wie Fig.8a Kurve 2

c wie Fig.17 Kurve 3

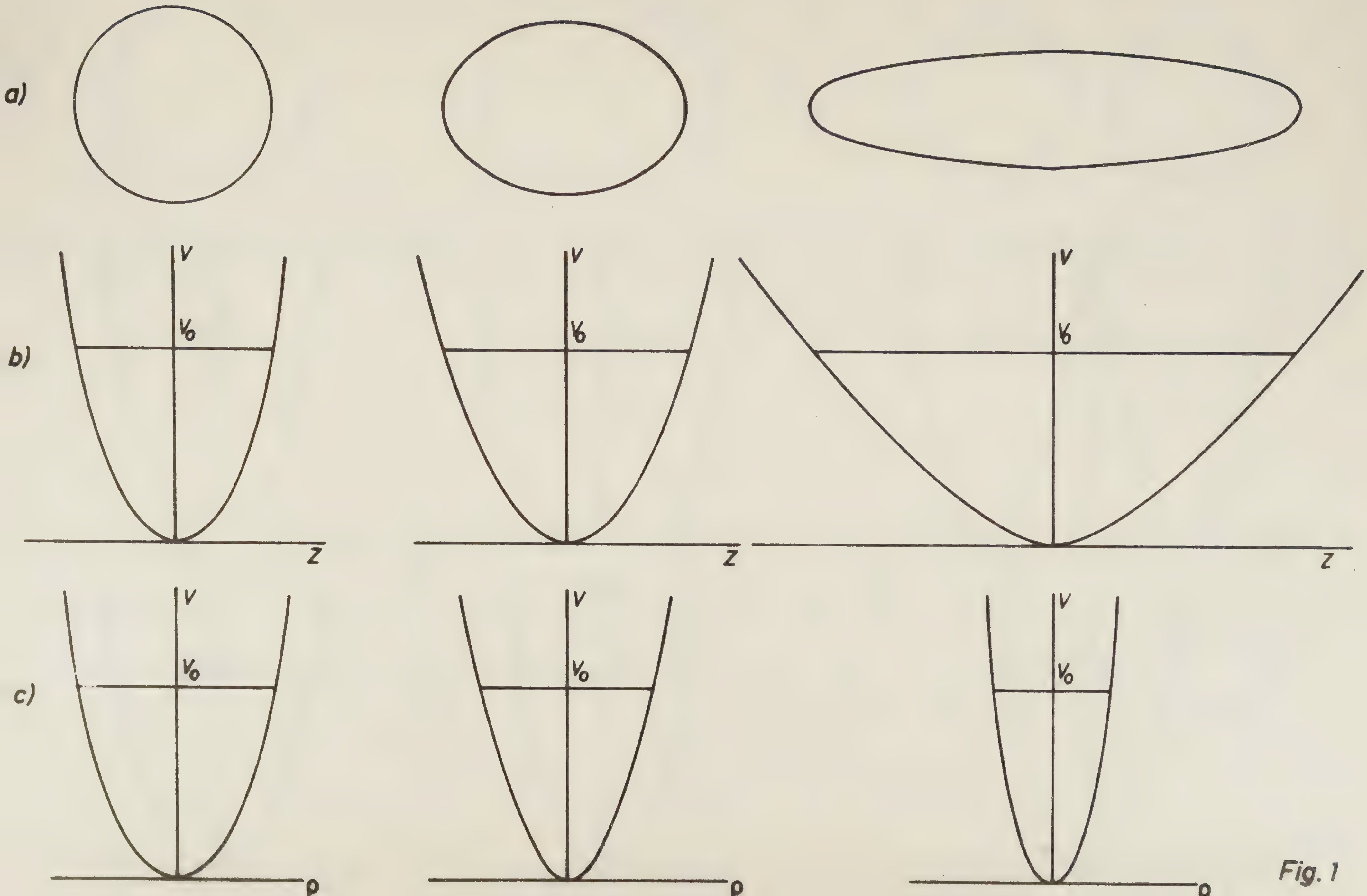


Fig. 1

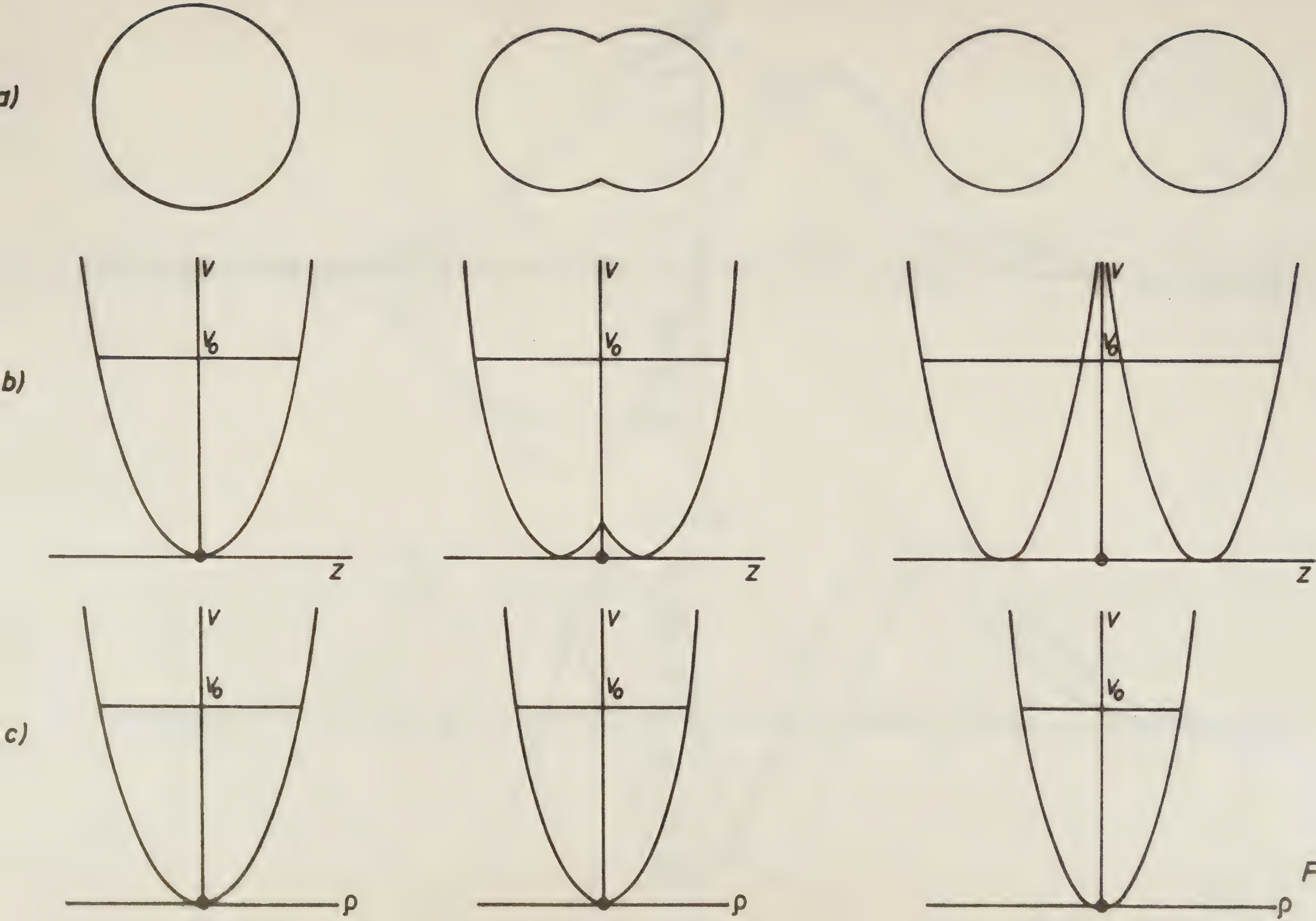


Fig. 2

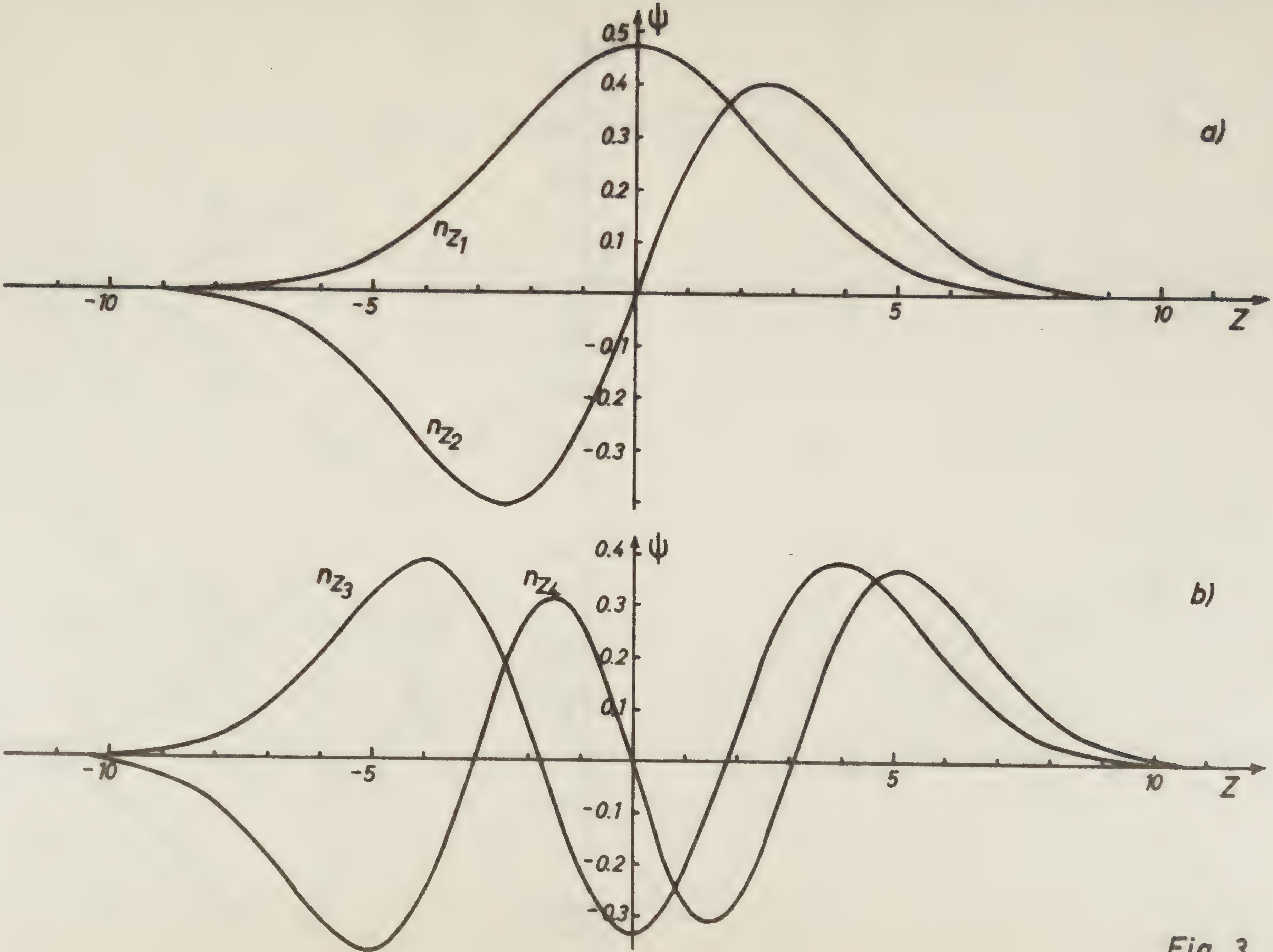
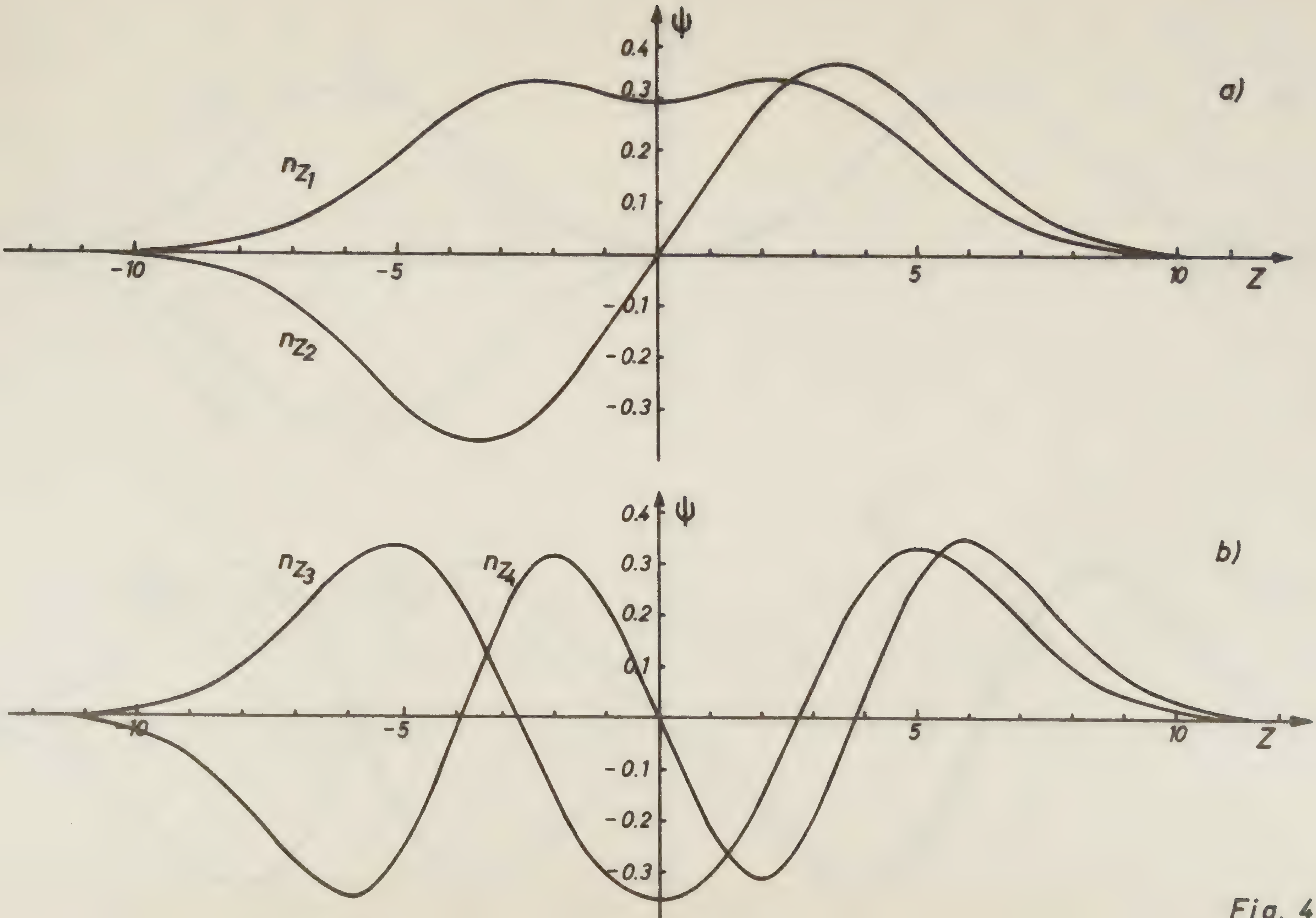


Fig. 3



ψ
0.4
0.3
0.2
0.1
-0.1
-0.2
-0.3
a)
n_{Z_1}
n_{Z_2}
-10
-5
5
10
Z
ψ
0.4
0.3
0.2
0.1
-0.1
-0.2
-0.3
b)
n_{Z_3}
n_{Z_4}
-10
-5
5
10
Z

Fig. 4

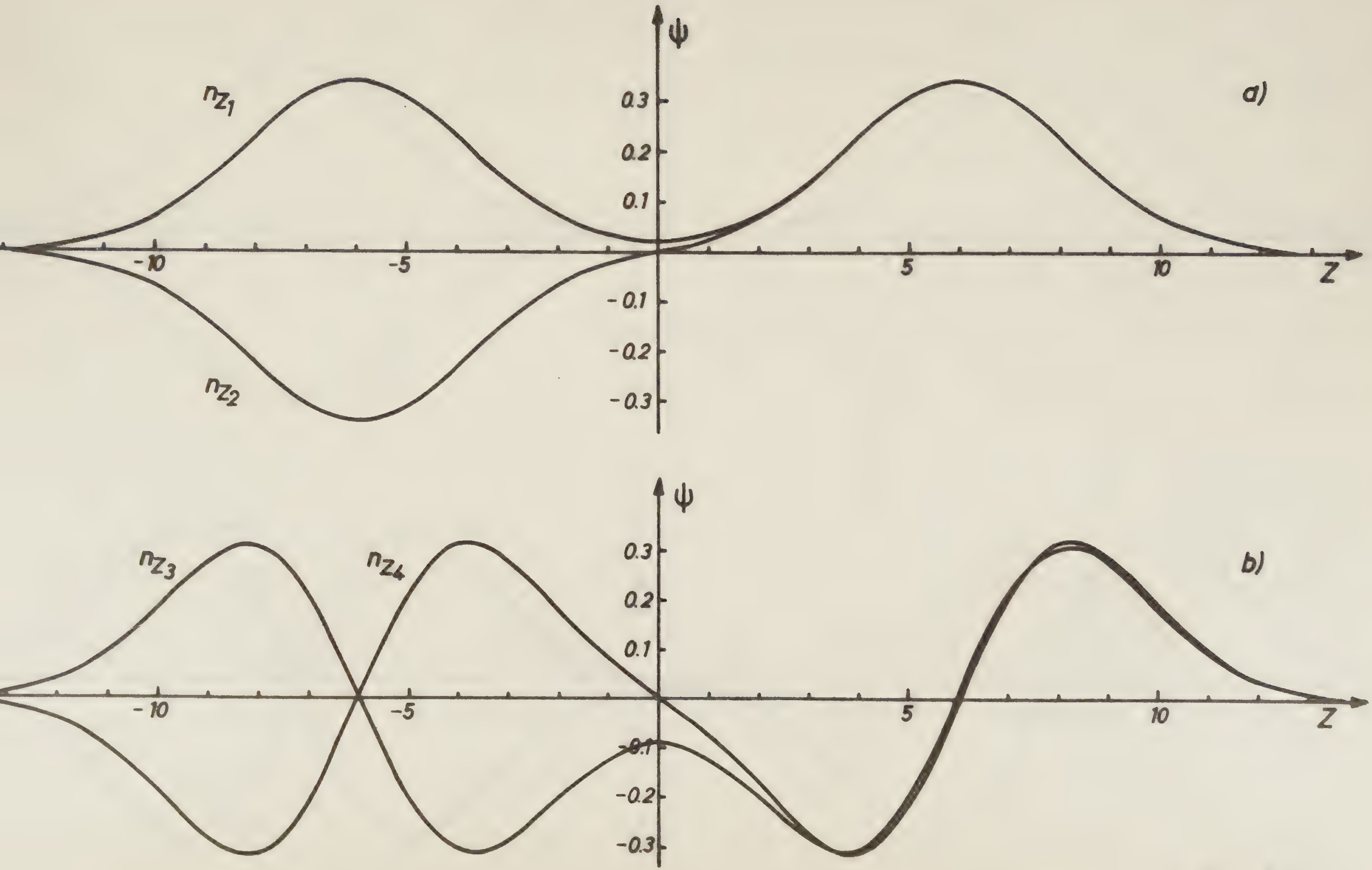
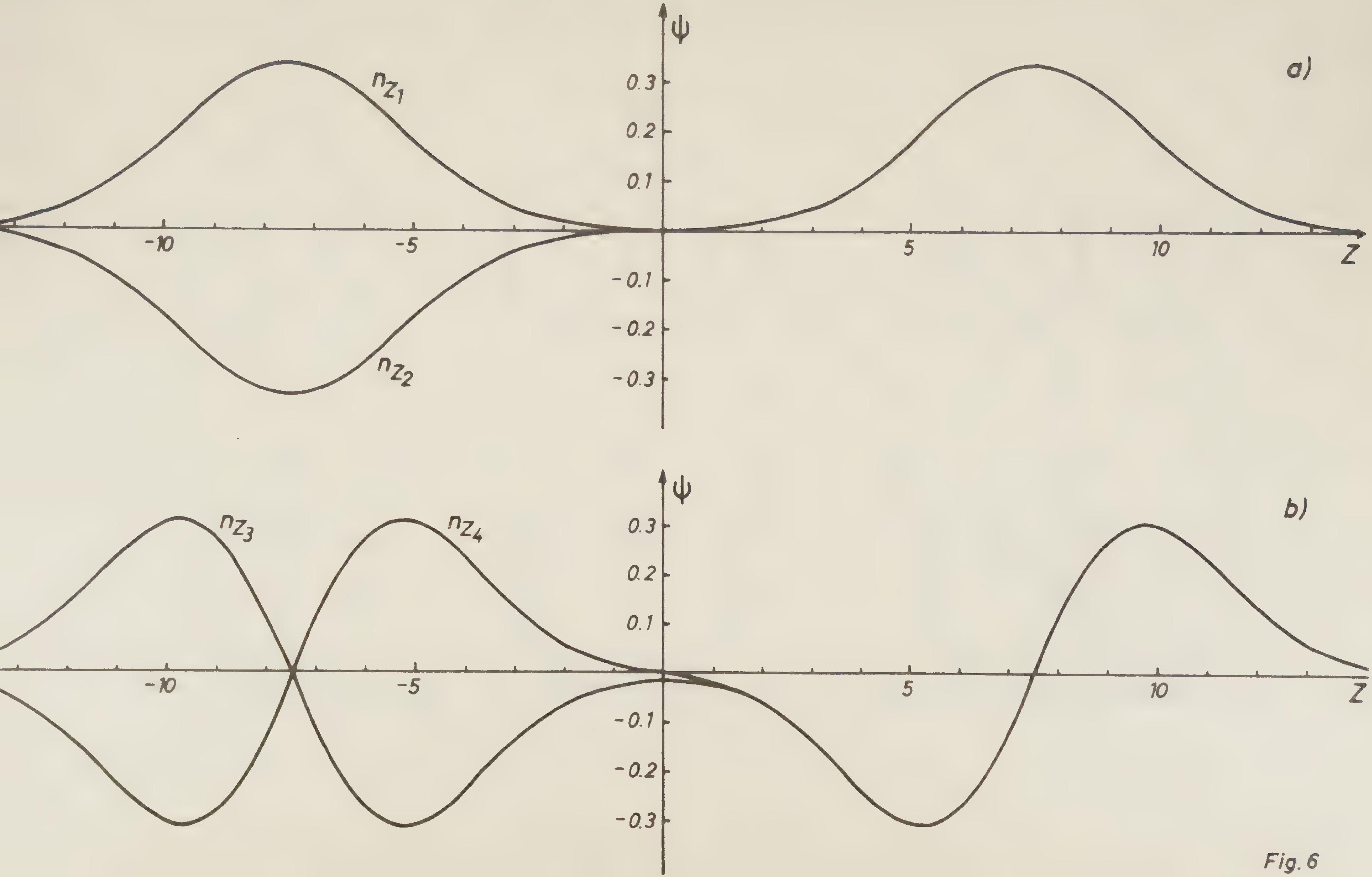

ψ
a)
n_{z_1}
n_{z_2}
0.3
0.2
0.1
-0.1
-0.2
-0.3
-10
-5
5
10
Z
ψ
b)
n_{z_3}
n_{z_4}
0.3
0.2
0.1
-0.1
-0.2
-0.3
-10
-5
5
10
Z

Fig. 5



ψ
a)
n_{Z_1}
n_{Z_2}
0.3
0.2
0.1
-0.1
-0.2
-0.3
-10
-5
5
10
Z
ψ
b)
n_{Z_3}
n_{Z_4}
0.3
0.2
0.1
-0.1
-0.2
-0.3
-10
-5
5
10
Z

Fig. 6

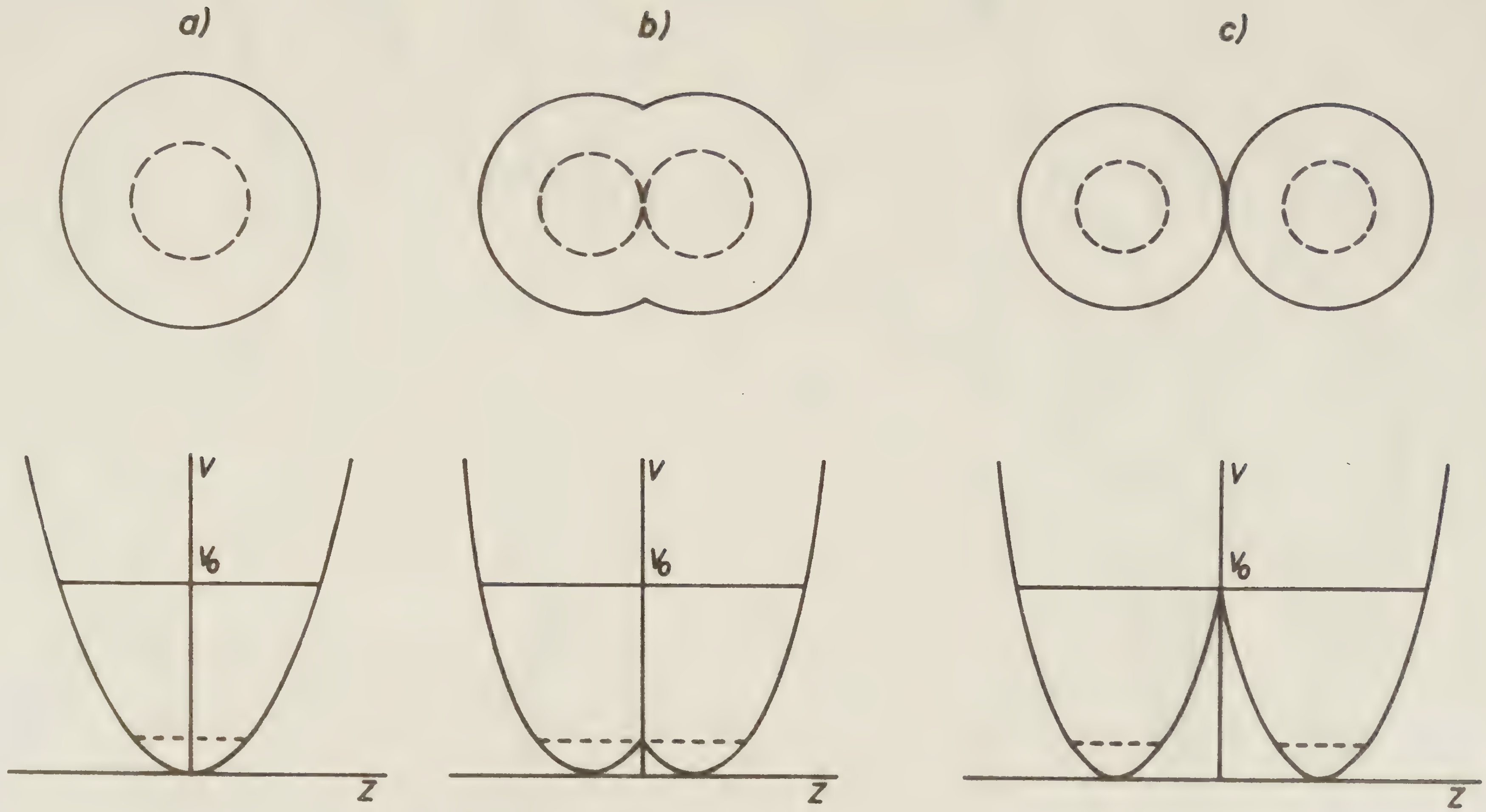
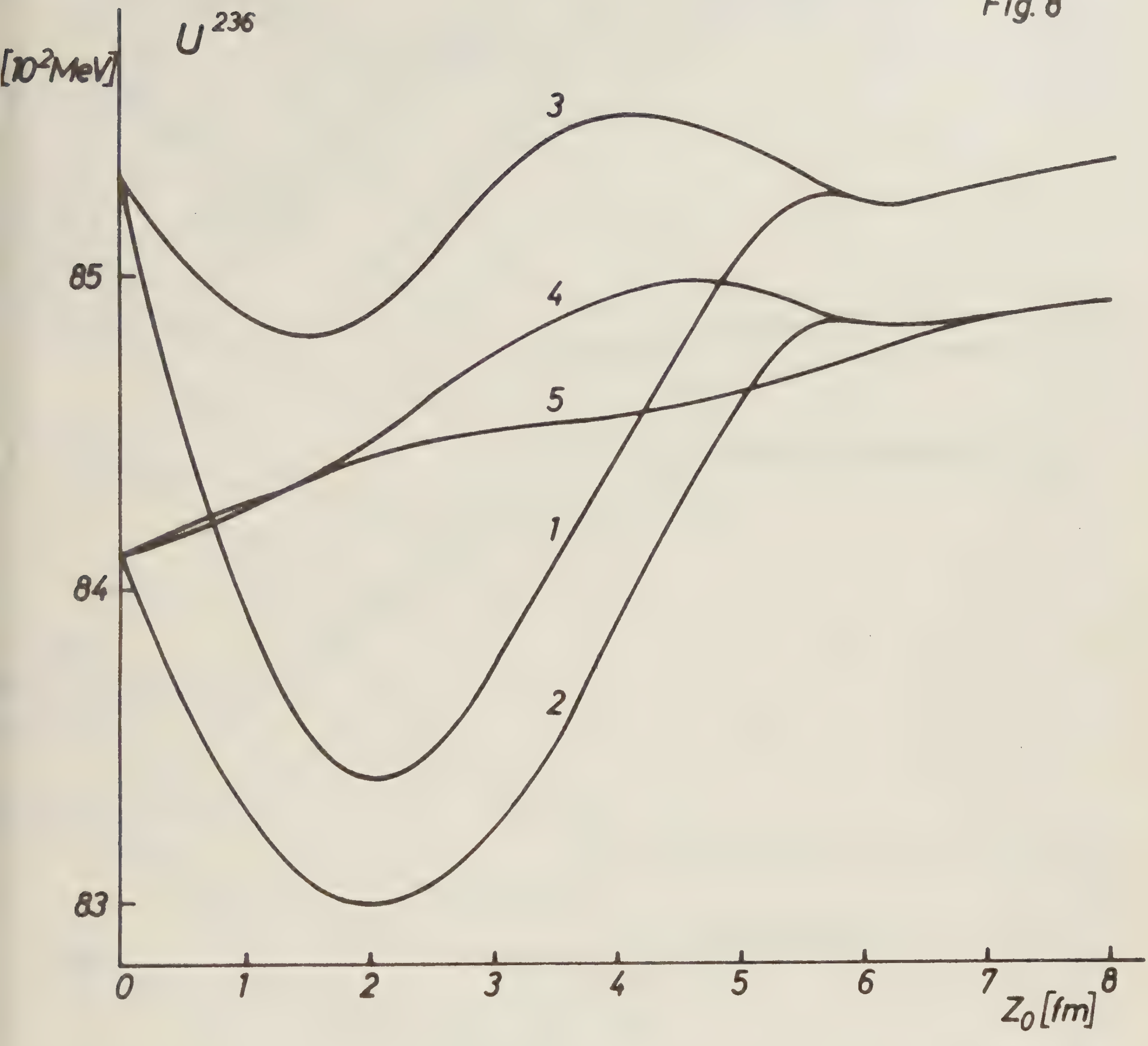


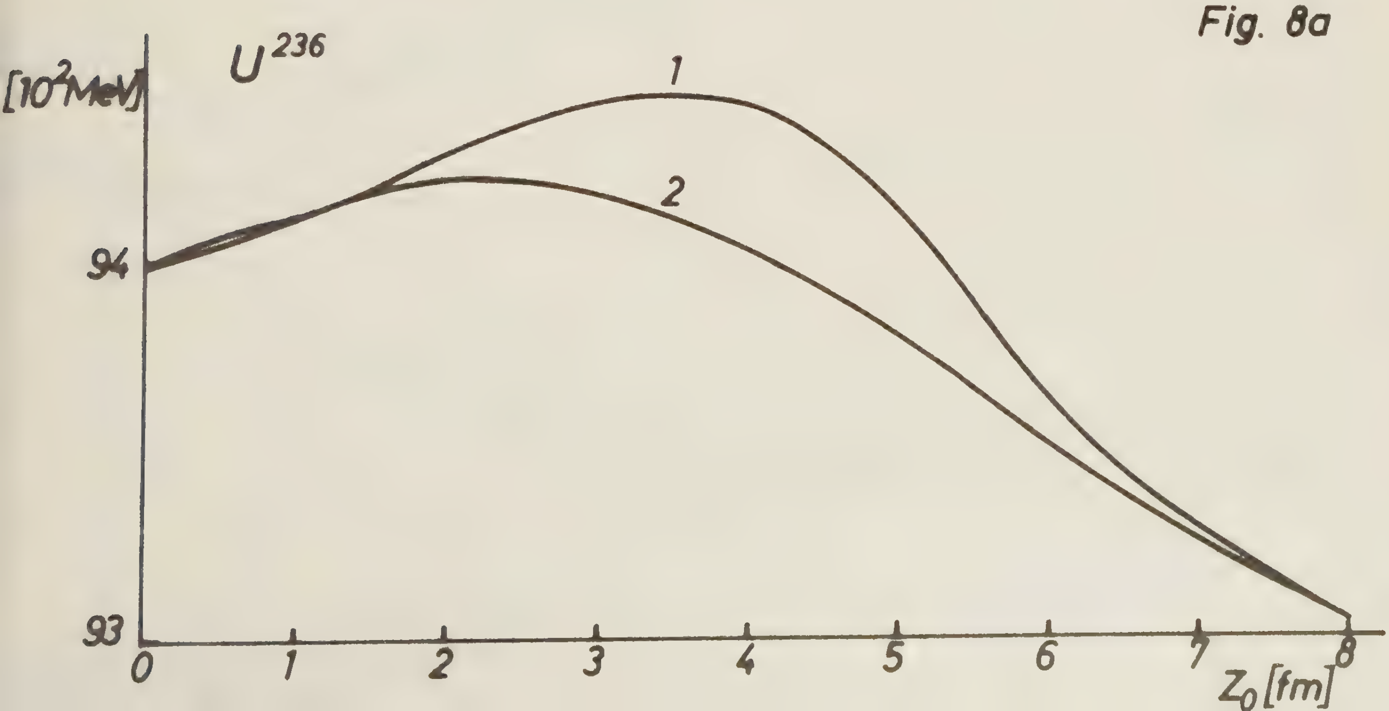
Fig. 7

Fig. 8

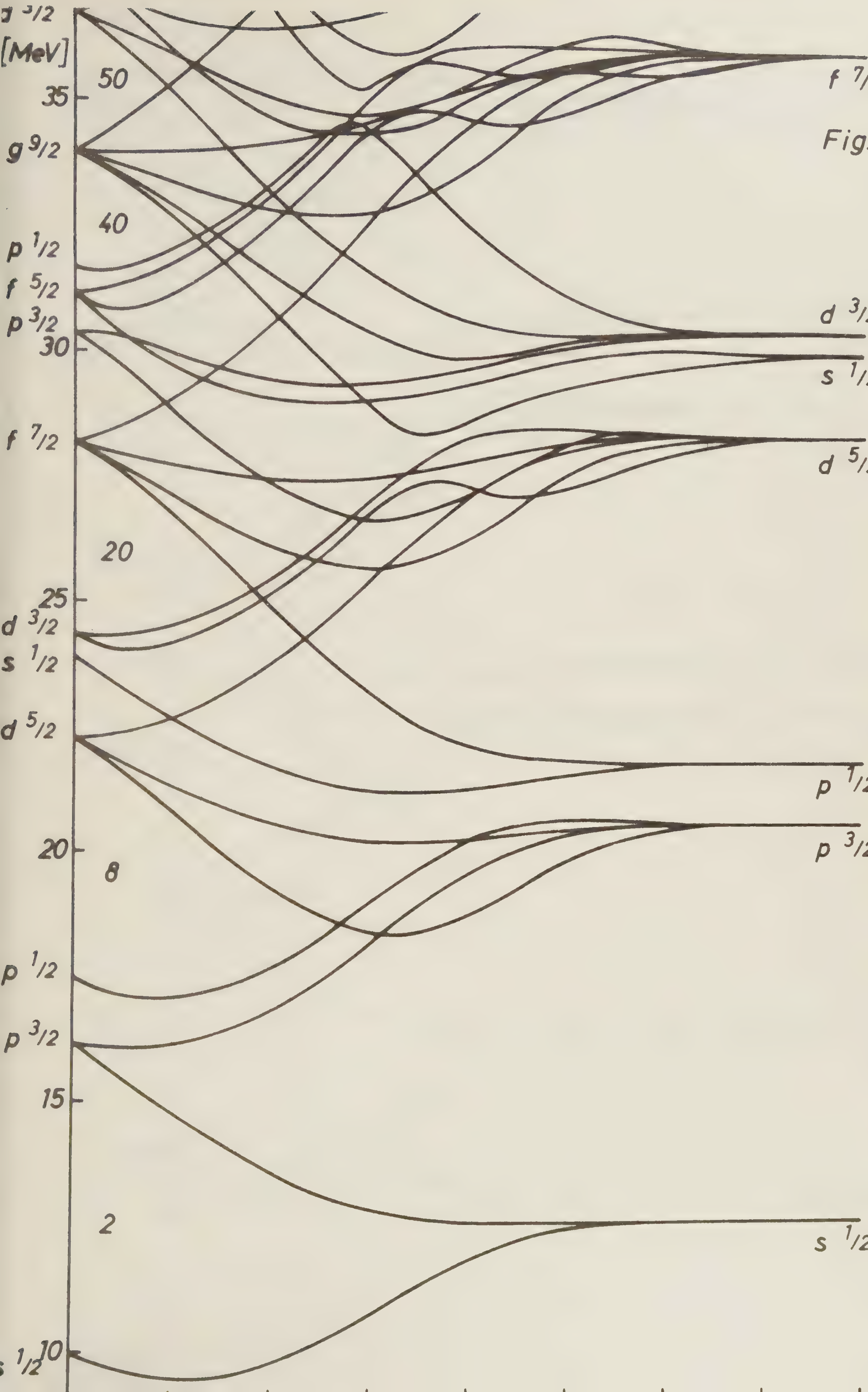


U^236
[10²MeV]
85
84
83
1
2
3
4
5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
Z0 [fm]

Fig. 8a



U^236
[10²MeV]
94
93
1
2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
Z0 [fm]



[MeV]
35
30
25
20
15
10
50
40
20
8
2
g 9/2
p 1/2
f 5/2
p 3/2
f 7/2
d 3/2
s 1/2
d 5/2
p 1/2
p 3/2
f 7/2
d 3/2
s 1/2
d 5/2
p 1/2
p 3/2
s 1/2

Fig. 9

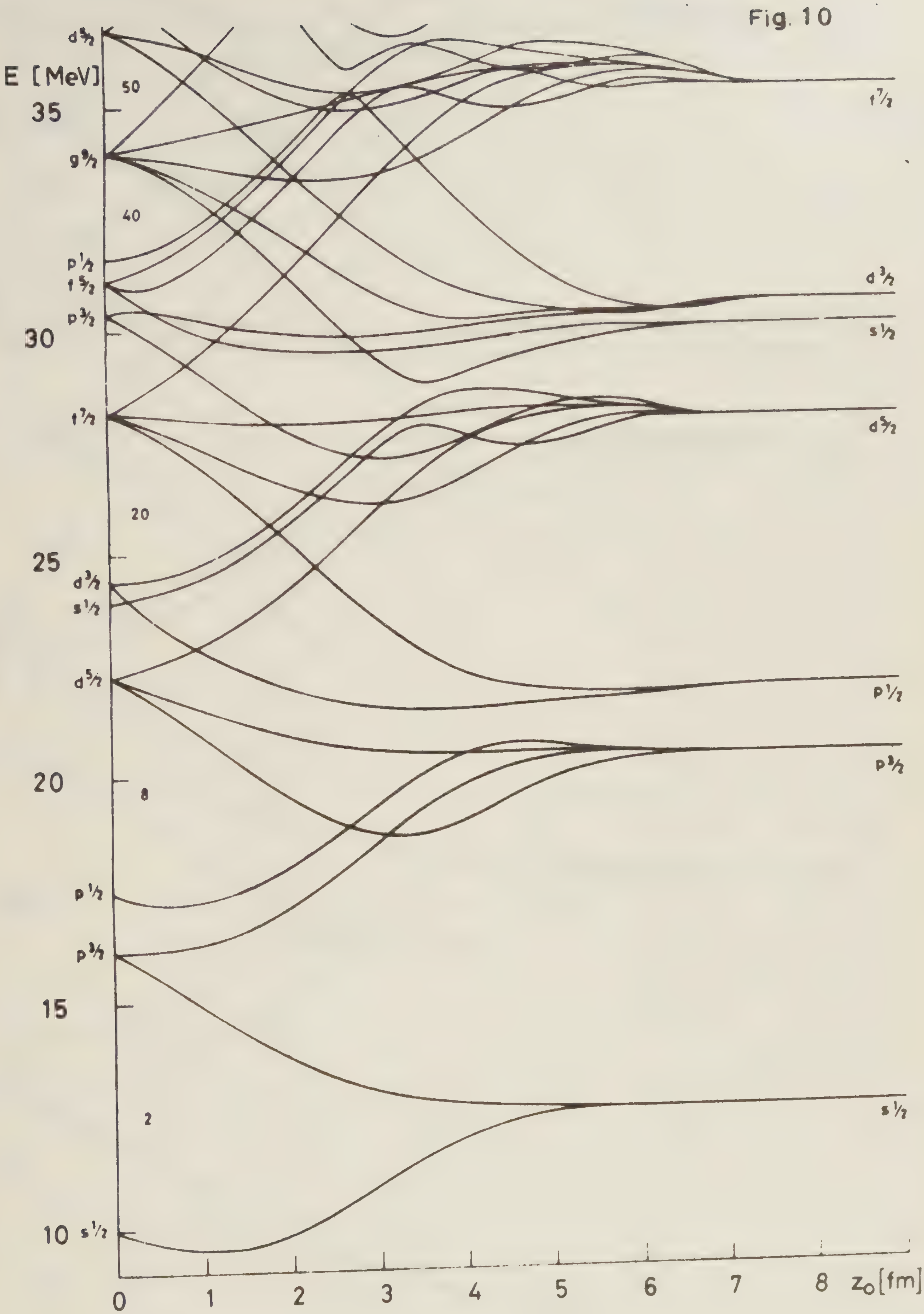


Fig. 10
E [MeV]
35
30
25
20
15
10
d5/2
g9/2
p1/2
f5/2
p3/2
f7/2
d3/2
s1/2
d5/2
p1/2
p3/2
s1/2
50
40
20
8
2
f7/2
d3/2
s1/2
d5/2
p1/2
p3/2
s1/2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
z0 [fm]

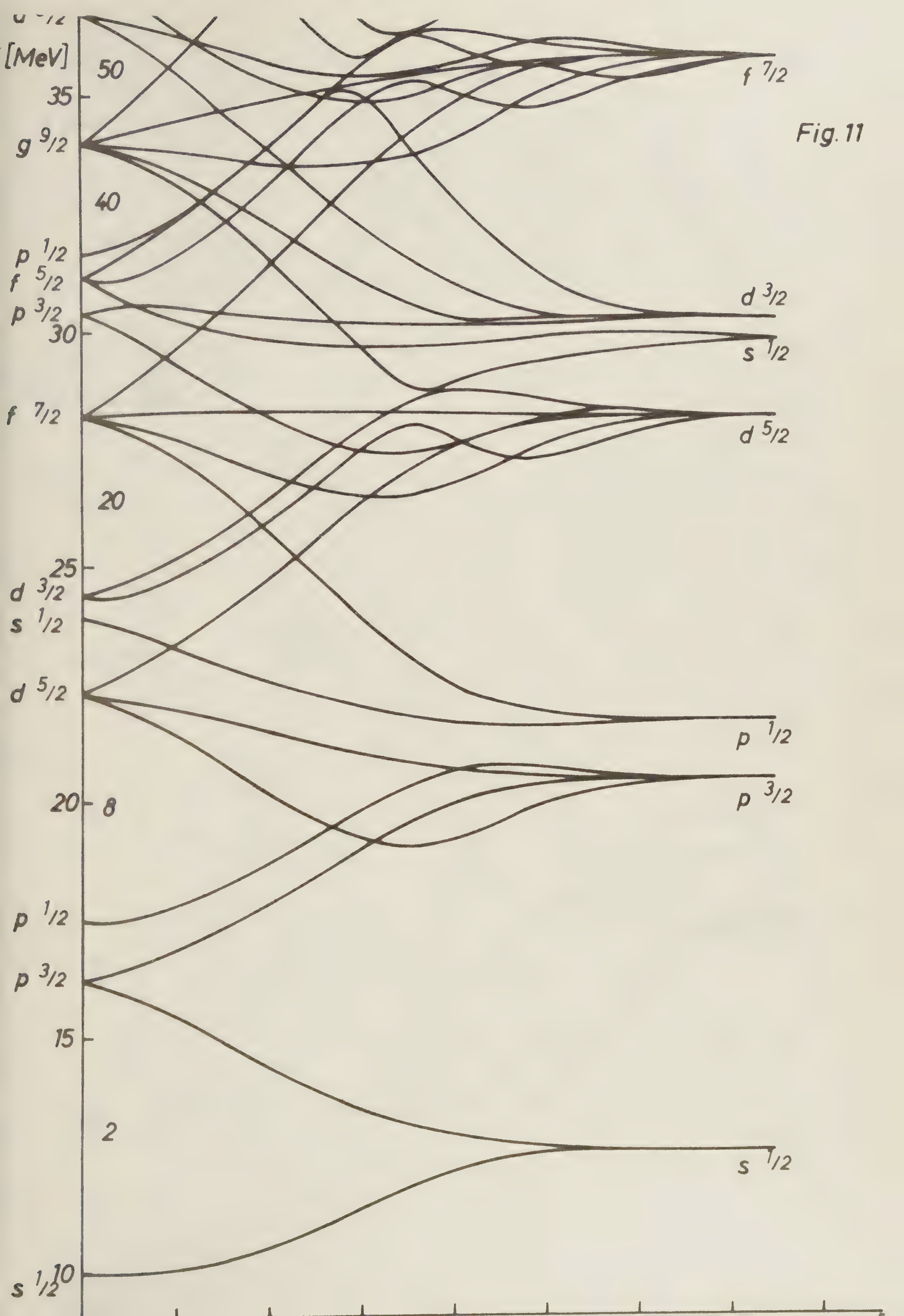
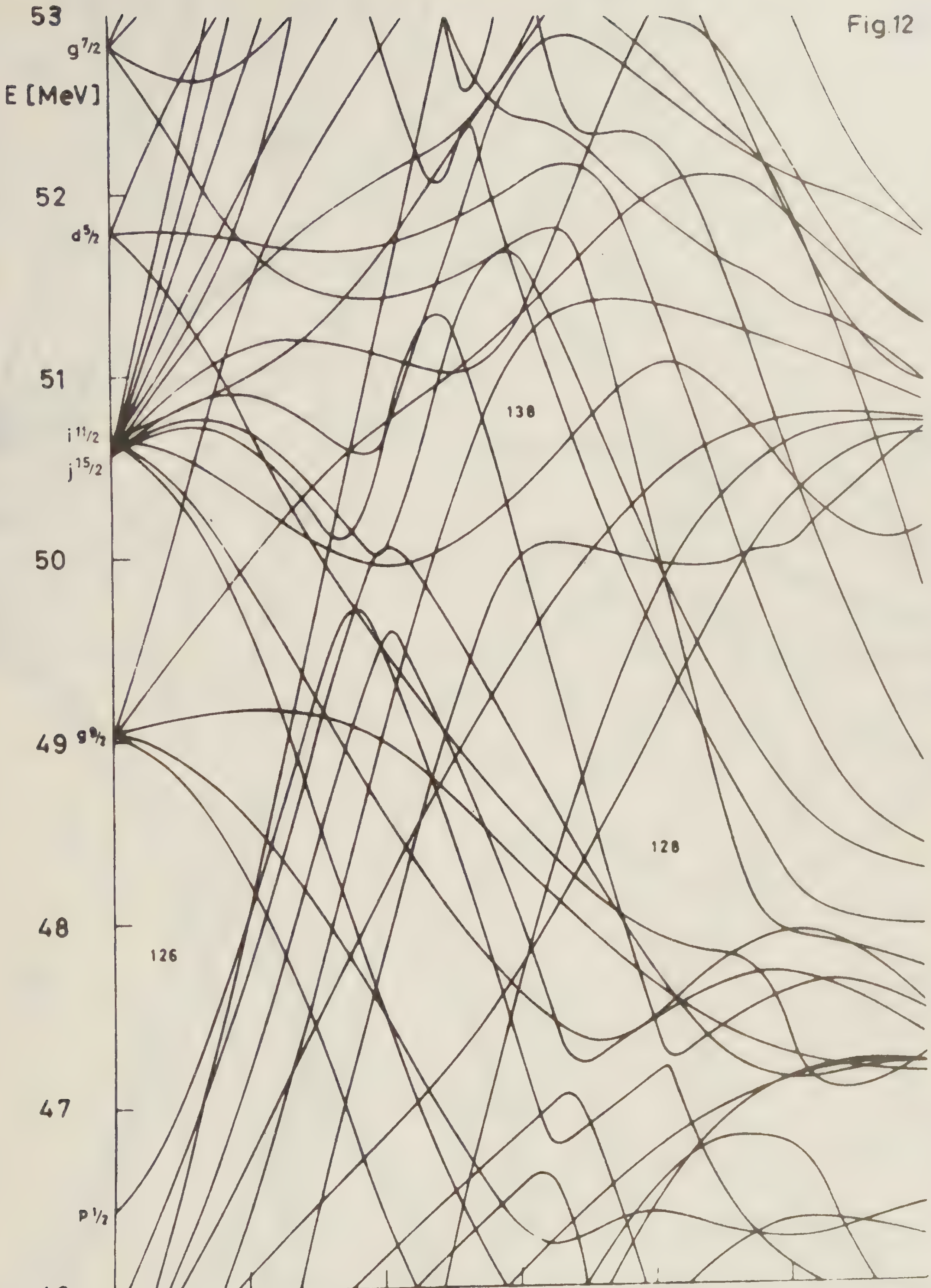

[MeV]
50
35
g 9/2
40
p 1/2
f 5/2
p 3/2
30
f 7/2
20
25
d 3/2
s 1/2
d 5/2
20
8
p 1/2
p 3/2
15
2
s 1/2
10
f 7/2
d 3/2
s 1/2
d 5/2
p 1/2
p 3/2
s 1/2

Fig. 11


Fig.12
53
g7/2
E [MeV]
52
d5/2
51
i11/2
j15/2
138
50
49
g9/2
128
48
126
47
p1/2
46
0
1
2
3
4
5
z0[fm]

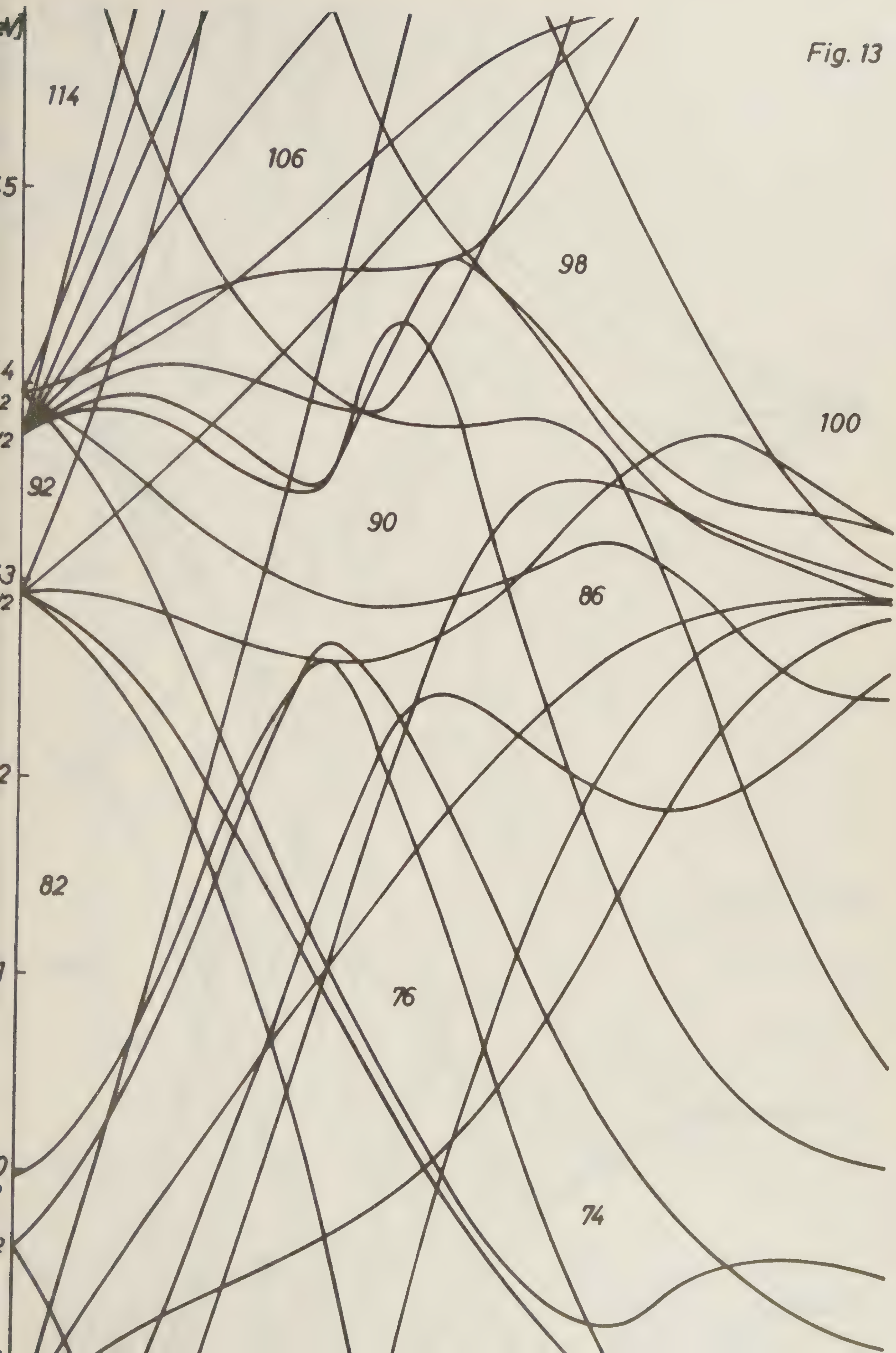


Fig. 13

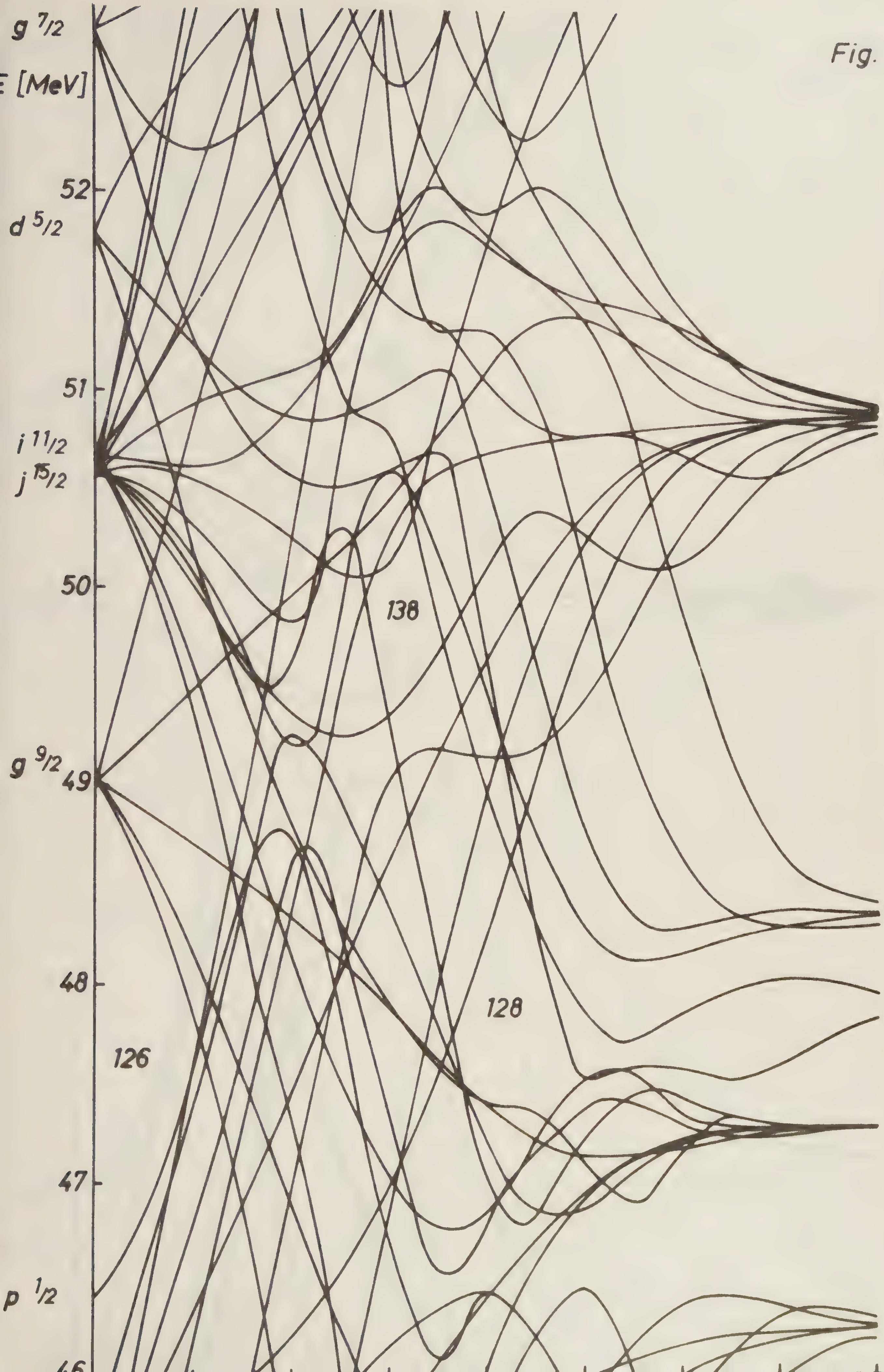
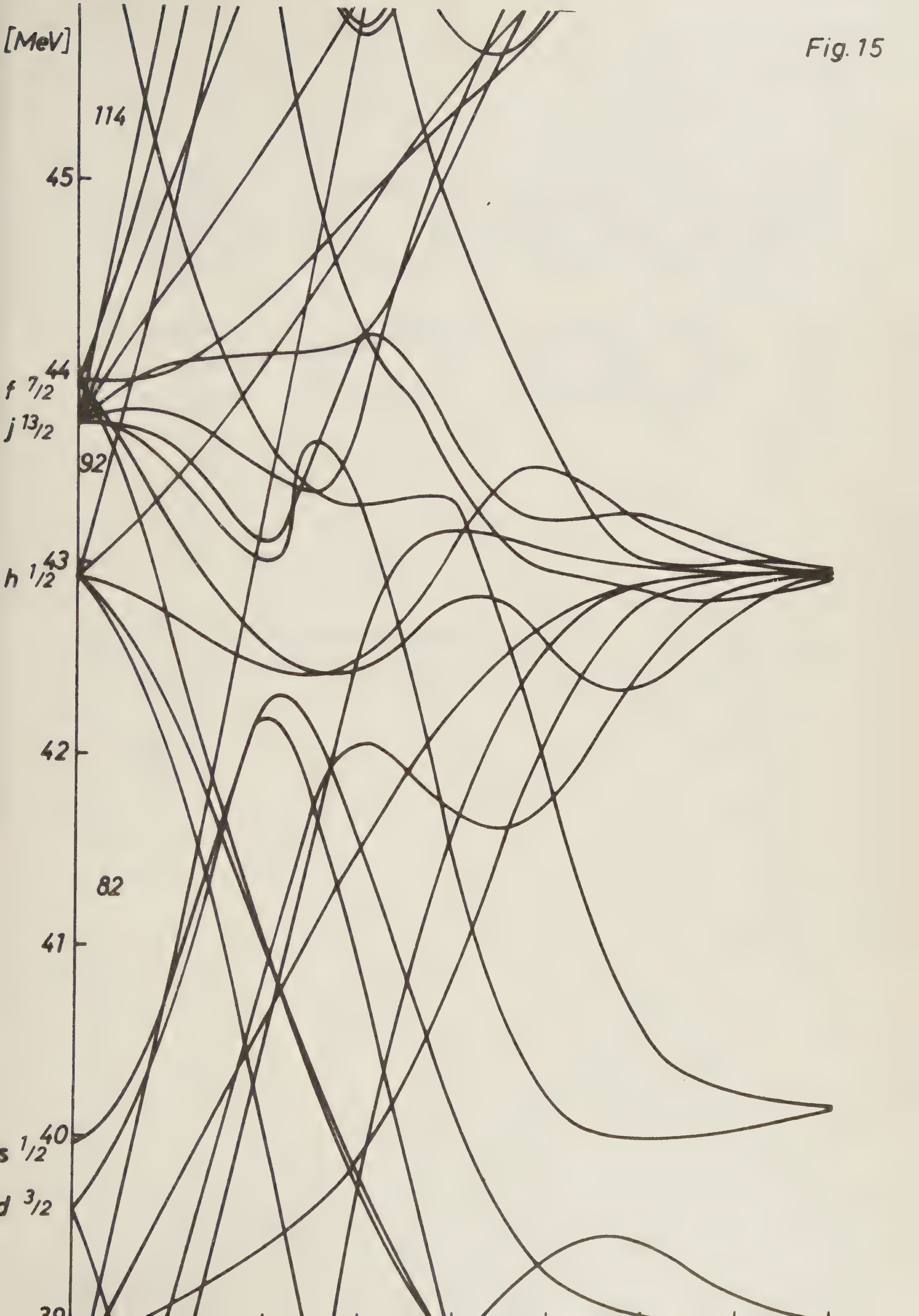


Fig. 14



[MeV]
Fig. 15
114
45
44
f 7/2
j 13/2
92
43
h 1/2
42
82
41
40
s 1/2
d 3/2

Fig. 16

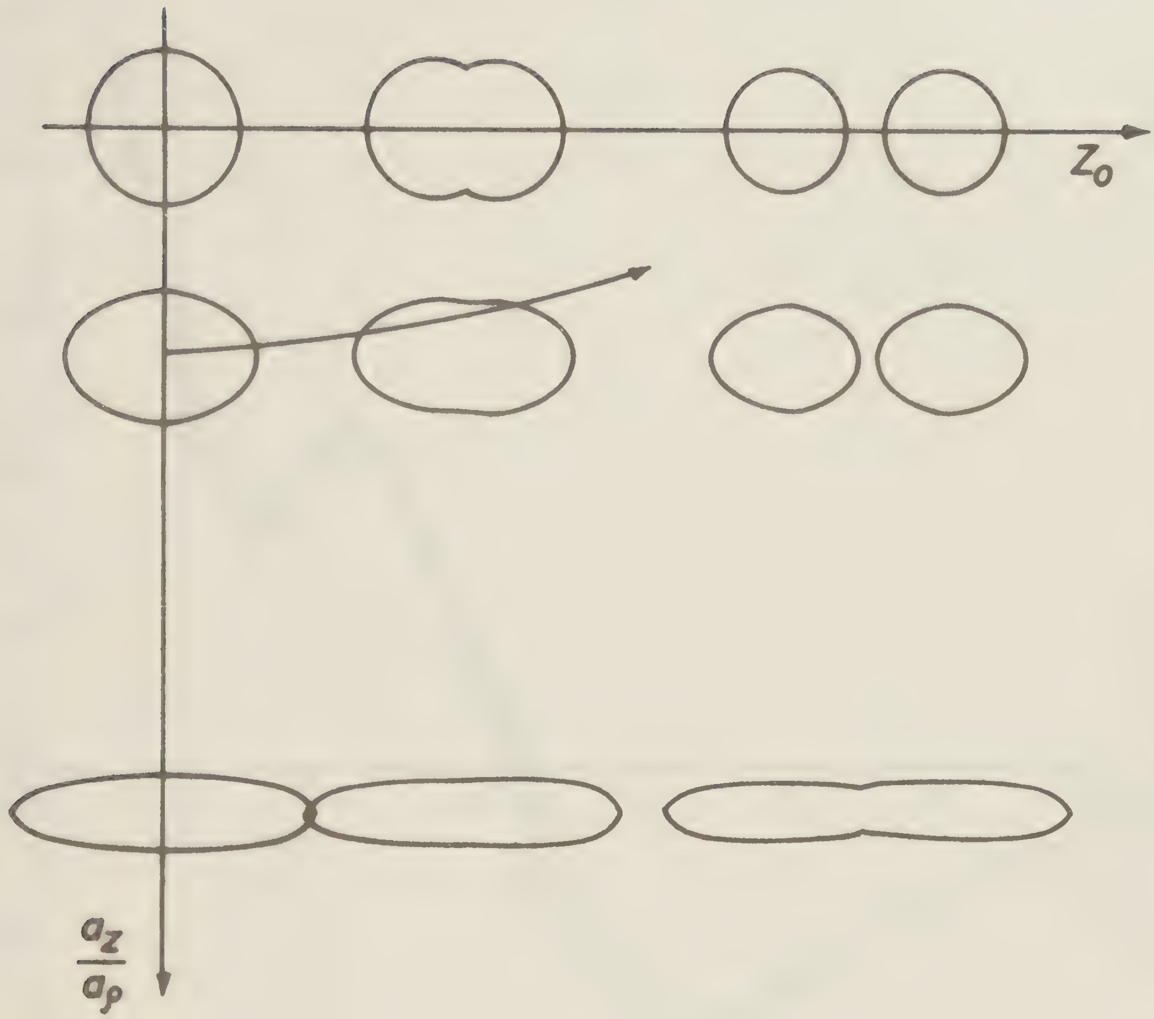


Fig. 17

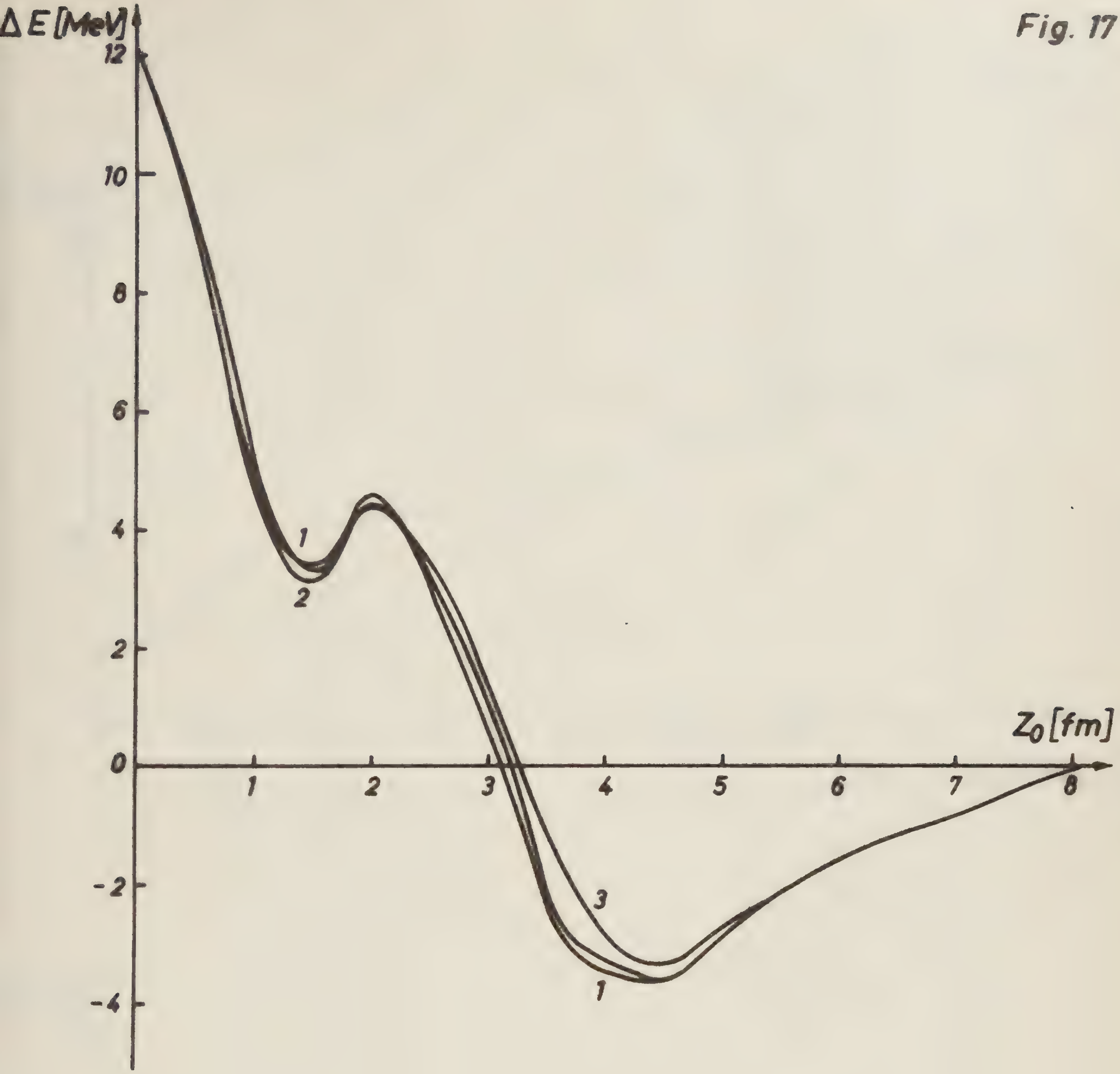

ΔE [MeV]
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
1
2
3
Z0 [fm]
1
2
3
4
5
6
7
8

Fig. 18

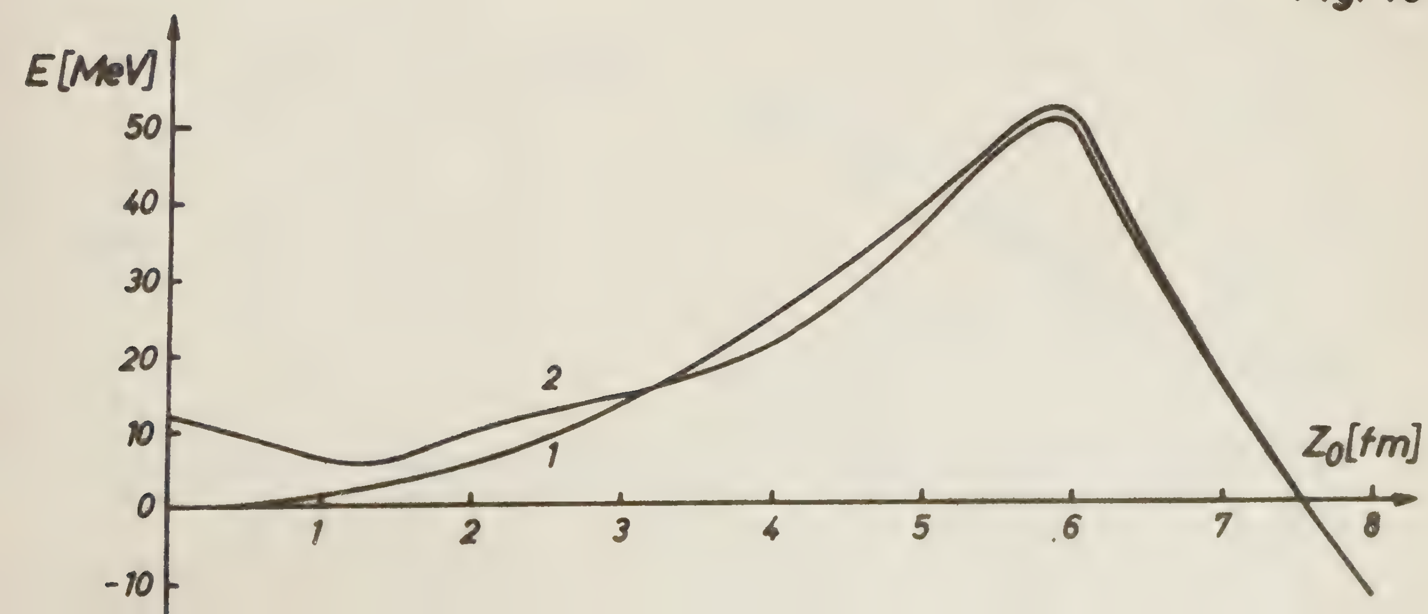

E [MeV]
50
40
30
20
10
0
-10
2
1
Z0 [fm]
1
2
3
4
5
6
7
8

Fig. 19

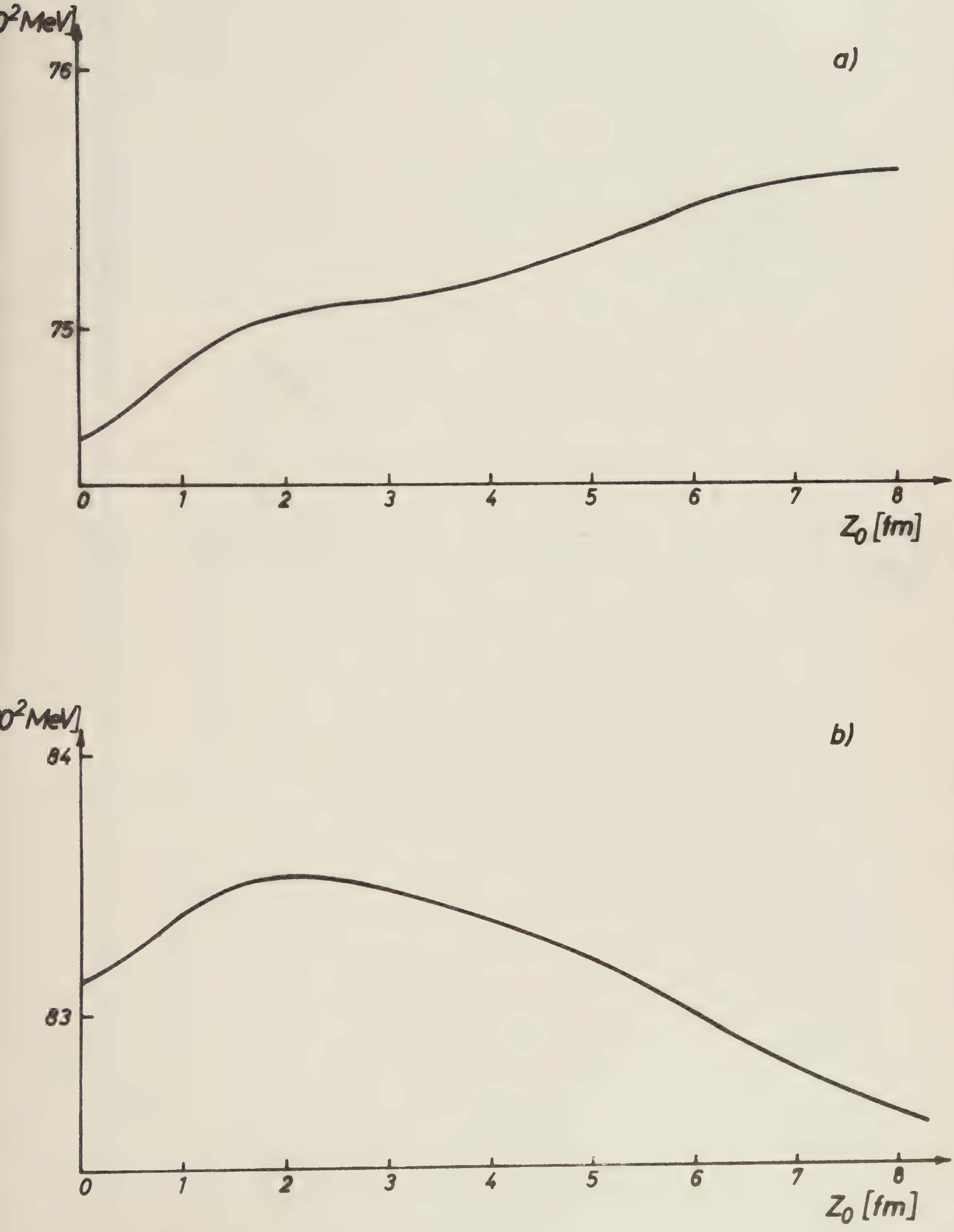
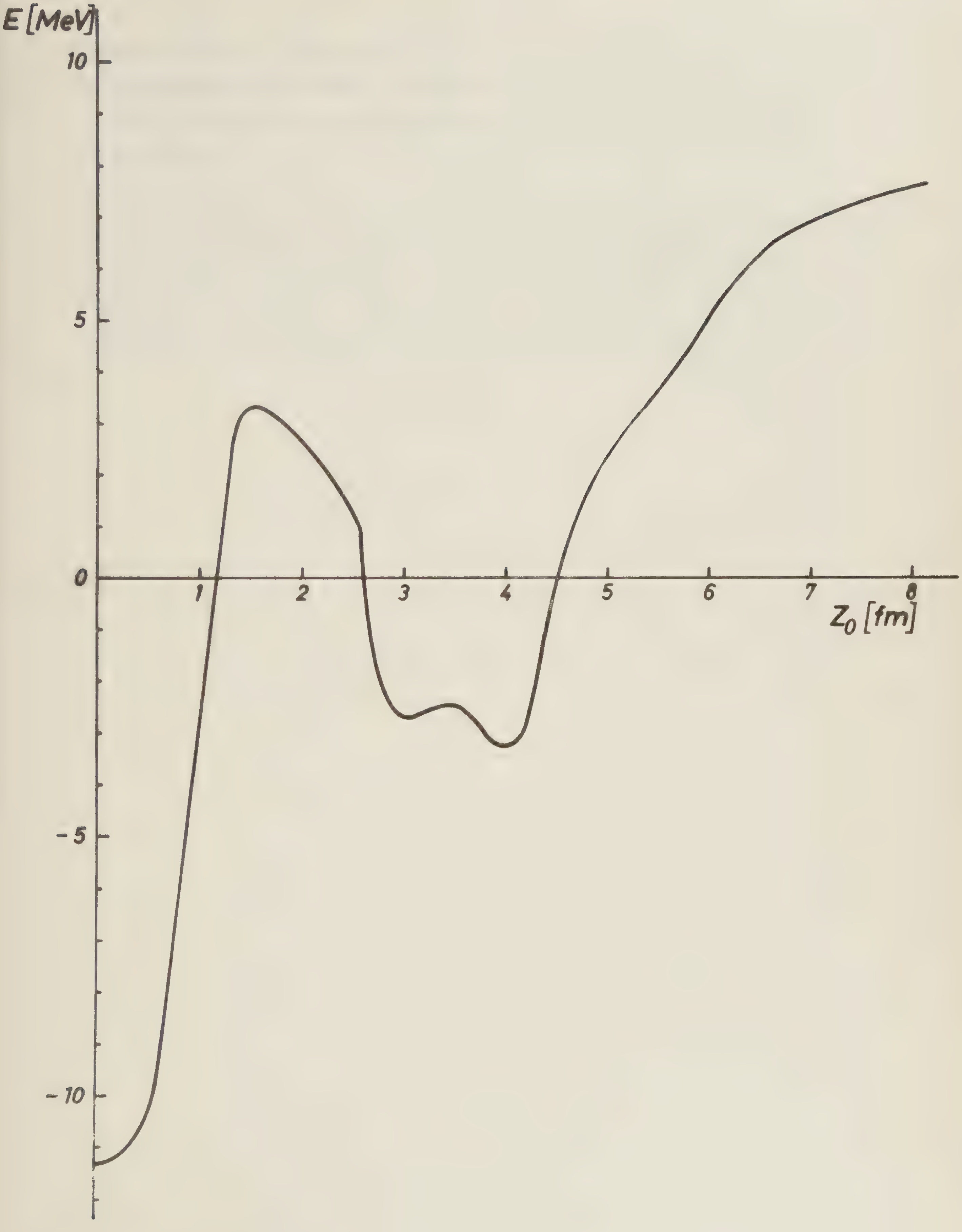


Fig. 19c



Meinem Lehrer, Herrn Prof.Dr. W. Greiner danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für sein stetes persönliches Interesse an diesem Thema und die vielen klärenden Diskussionen.

Weiterhin danke ich meinen Kollegen für die vielen Erörterungen schwieriger Probleme und die Erstellung und Überlassung einiger Standardprogramme für die Rechenmaschine. Ferner bedanke ich mich bei Frau Knolle, Frau Utschig und Frl. Eidt für ihre Hilfe bei der Fertigstellung des Manuskriptes.

Lebenslauf

Am 2. September 1942 wurde ich als viertes und letztes Kind des damaligen Marineingenierus Karl-Heinz Scharnweber und seiner Frau Hildegard, geb. Bonin, in Rodolstadt/Thüringen geboren. Kurz nach meiner Geburt kehrten meine Eltern in ihre Heimatstadt Kiel zurück, wo ich von Ostern 1949 bis Ostern 1953 eine Volksschule und anschließend ein neusprachliches und mathematisch-naturwissenschaftliches Gymnasium für Jungen besuchte. Im Februar 1962 bestand ich dort die Reifeprüfung. Danach leistete ich meine Wehrpflicht bei der ABC-Abwehrtruppe der Bundeswehr in Zweibrücken, Kassel und Sonthofen ab. Im Sommer 1964 begann ich das Studium für Physik an der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt a.M., da meine Eltern inzwischen nach Darmstadt umgezogen waren. Ich bestand im Sommer 1966 die Vordiplom- und im Sommer 1968 die Diplomprüfung. Die Diplomarbeit hatte ich unter der Leitung von Herrn Prof.Dr. W. Greiner im Institut für Theoretische Physik angefertigt. Dort bin ich auch seitdem als wissenschaftlicher Mitarbeiter tätig.